

Examens corrigés

François DE MARÇAY
Département de Mathématiques d'Orsay
Université Paris-Sud, France

1. Examen 1

Exercice 1. [Inégalité de Tchebychev] Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable à valeurs positives qui est Lebesgue-intégrable. Pour $\alpha > 0$, on pose :

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \alpha\}.$$

Montrer que (figure-bonus possible) :

$$m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int f.$$

Exercice 2. En dimension $d \geq 1$, soit une fonction mesurable $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ à valeurs positives finies.

(a) Rappeler la définition initiale de la mesurabilité d'une fonction, puis des caractérisations équivalentes.

(b) Montrer que, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, les sous-ensembles :

$$E_k := \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{k-1} < f(x) \leq 2^k\}$$

sont mesurables dans \mathbb{R}^d .

(c) Montrer que l'on a la réunion disjointe (figure-bonus possible) :

$$\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > 0\}.$$

(d) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on introduit la fonction étagée :

$$F_n := \sum_{k=-n}^{k=+n} 2^k \mathbf{1}_{E_k},$$

ainsi que $F := \lim_{n \rightarrow \infty} F_n$. Montrer que l'on a en tout point :

$$\frac{1}{2} F \leq f \leq F.$$

(e) Montrer que la fonction d'origine f est Lebesgue-intégrable si et seulement si $\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^k m(E_k) < \infty$.

(f) Avec $a, b \in \mathbb{R}$, on introduit les deux fonctions :

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^a} & \text{pour } 0 < |x| \leq 1, \\ 0 & \text{autrement,} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) := \begin{cases} \frac{1}{|x|^b} & \text{pour } |x| \geq 1, \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$

En utilisant (e), montrer que f est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^d exactement lorsque $a < d$, et aussi, montrer que g est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^d exactement lorsque $b > d$.

Exercice 3. Sur un segment compact $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Montrer qu'on peut néanmoins définir sans modification la notion de Riemann-intégrabilité de f , mais montrer alors que si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision Δ de $[a, b]$ telle que la différence entre les sommes de Darboux supérieure et inférieure de f satisfait $\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq \varepsilon$, alors ceci implique en fait que f est nécessairement bornée.

Exercice 4. Soient $E_1, E_2, E_3, \dots \subset \mathbb{R}^d$ une infinité dénombrable d'ensembles mesurables emboîtés de manière décroissante les uns dans les autres :

$$E_k \supset E_{k+1} \quad (k \geq 1).$$

On suppose que pour un certain entier $k_0 \geq 1$, on a :

$$m(E_{k_0}) < \infty.$$

En utilisant un théorème fondamental énoncé avec soin concernant les réunions dénombrables disjointes d'ensembles mesurables, montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \lim_{K \rightarrow \infty} m(E_K),$$

puis trouver un exemple simple faisant voir que cette conclusion peut être mise en défaut sans l'existence de k_0 tel que $m(E_{k_0}) < \infty$.

Exercice 5. Le but de cet exercice est de montrer que recouvrir les sous-ensembles $E \subset \mathbb{R}^d$ par un nombre *fini* de cubes ne suffit pas à produire un concept réellement satisfaisant de mesure extérieure $m^*(E)$. On se restreint ici à la dimension $d = 1$. En effet, la *mesure extérieure de Jordan* $m_J^*(E)$ peut être définie par :

$$m_J^*(E) = \inf \sum_{j=1}^J |I_j|,$$

où l'infimum est pris sur les recouvrements *finis* :

$$E \subset \bigcup_{j=1}^J I_j,$$

par des intervalles fermés I_j .

(a) Montrer que $m_J^*(E) = m_J^*(\overline{E})$ pour tout sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$.

(b) Trouver un sous-ensemble dénombrable $E \subset [0, 1]$ tel que $m_J^*(E) = 1$, tandis que sa mesure extérieure de Lebesgue vaut $m^*(E) = 0$.

Exercice 6. Dans \mathbb{R}^d , soit un nombre fini quelconque $n \geq 1$ de sous-ensembles mesurables $A_1, A_2, \dots, A_n \subset \mathbb{R}^d$ de mesures finies :

$$m(A_1) < \infty, \quad m(A_2) < \infty, \quad \dots, \quad m(A_n) < \infty.$$

Montrer que (figure-bonus possible) :

$$m\left(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\right) = \sum_{1 \leq k \leq n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} m\left(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}\right).$$

Exercice 7. Soit m la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense dans \mathbb{R} tel que $m(\Omega) \leq \varepsilon$.

Exercice 8. Soit $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ une fonction réelle continue à support compact. Montrer que :

$$0 = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)| dx.$$

Indication: Si $\text{supp}(f) \subset B(0, R)$ pour un rayon $R \gg 1$ assez grand, se limiter à $h \in \mathbb{R}^d$ avec $|h| < 1$ et se ramener à $\int_{B(0, R+1)}$.

Exercice 9. Trouver une suite de fonctions en escalier $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisant :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx,$$

mais telle que, en *tout* point $x \in [0, 1]$, la suite numérique :

$$(f_n(x))_{n=1}^{\infty}$$

soit bornée et ne converge vers aucune valeur réelle. Indication: Utiliser la suite double $F_{k,m}(x) := \mathbf{1}_{[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}]}$ pour $1 \leq k \leq m$, illustrer son comportement pour $m = 1, 2, 3, 4$, décrire en mots les idées qui viennent à l'esprit, et enfin, rédiger en détail une démonstration rigoureuse.

2. Corrigé de l'examen 1

Exercice 1. Comme $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est Lebesgue-intégrable, pour tout réel $\alpha > 0$, l'ensemble de sur-niveau :

$$E_\alpha := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > \alpha\}$$

est mesurable dans \mathbb{R}^d . De plus, l'inégalité entre fonctions :

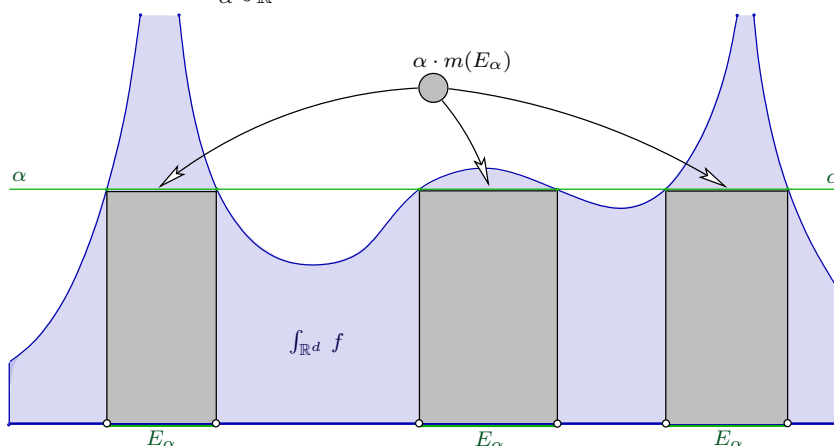
$$f(x) \geq \alpha \cdot \mathbf{1}_{E_\alpha}(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d),$$

est claire lorsque $x \notin E_\alpha$ car $f(x) \geq 0 = \alpha \cdot 0$ par hypothèse, et vraie aussi lorsque $x \in E_\alpha$, car $f(x) > \alpha = \alpha \cdot 1$, donc elle est satisfaite partout.

Par intégration de cette inégalité, nous obtenons instantanément :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f \geq \alpha \cdot m(E_\alpha),$$

ce qui donne bien $m(E_\alpha) \leq \frac{1}{\alpha} \int_{\mathbb{R}^d} f$.



Géométriquement, l'hypographe de f :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq y \leq f(x)\},$$

dont la mesure $(d + 1)$ -dimensionnelle vaut $\int_{\mathbb{R}^d} f$ d'après un théorème du cours, est « coupé » à hauteur $\alpha > 0$, et sur le sous-ensemble $E_\alpha \subset \mathbb{R}^d$ où $f > \alpha$, on ne retient que la valeur-type α , ce qui correspond à restreindre la considération au « pseudo-rectangle » de hauteur α et de « base » E_α , lequel est entièrement contenu dans l'hypographe de f au-dessus de E_α :

$$\{(x, y) : x \in E_\alpha, 0 \leq y \leq \alpha\} \subset \{(x, y) : x \in E_\alpha, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

et par intégration « visuelle », on trouve bien que l'aire de ce pseudo-rectangle est inférieure à l'aire intégrale totale :

$$\alpha \cdot m(E_\alpha) \leq \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Exercice 2. (a) Une fonction $f: E \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ est dite *mesurable* si, pour tout $a \in \mathbb{R}$, son ensemble de sous-niveau :

$$f^{-1}([-\infty, a[) = \{x \in E: f(x) < a\},$$

est un sous-ensemble *mesurable* de \mathbb{R}^d . Dans le cours, on a obtenu les caractérisations équivalentes suivantes :

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\{x \in E: f(x) \leq a\}$$

est mesurable ;

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\{x \in E: f(x) \geq a\}$$

est mesurable ;

- pour tout $a \in \mathbb{R}$, l'ensemble :

$$\{x \in E: f(x) > a\}$$

est mesurable ;

- pour tout couple de nombres réels finis :

$$-\infty < a < b < +\infty,$$

les ensembles-tranches :

$$\{a < f < b\}$$

sont mesurables ;

- plus généralement, il en va de même en remplaçant $\{a < f < b\}$ par l'un des trois ensembles :

$$\{a \leq f < b\}, \quad \{a < f \leq b\}, \quad \{a \leq f \leq b\}.$$

(b) On en déduit que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles $E_k := \{x \in \mathbb{R}^d: 2^{k-1} < f(x) \leq 2^k\}$ sont mesurables dans \mathbb{R}^d .

(c) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, l'ensemble $E_k = \{x \in \mathbb{R}^d: 2^{k-1} < f(x) \leq 2^k\}$ est contenu dans l'ensemble :

$$E^* := \{x \in \mathbb{R}^d: f(x) > 0\},$$

donc :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k \subset E^*.$$

Pour l'inclusion opposée, soit $x \in E^*$ quelconque. Comme $f(x) > 0$, et comme la réunion d'intervalles enchaînés :

$$\prod_{k \in \mathbb{Z}}]2^{k-1}, 2^k] =]0, \infty[$$

est disjointe, il existe un unique entier $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$2^{k_x-1} < f(x) \leq 2^{k_x},$$

ce qui signifie $x \in E_{k_x}$, et donne bien :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} E_k \supset E^*.$$

(d) Soit $x \in \mathbb{R}^d$ quelconque fixé.

- Si $f(x) = 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $x \notin E_k$ quel que soit $k \in \mathbb{Z}$, on a :

$$F_n(x) = \sum_{|k| \leq n} 2^k \mathbf{1}_{E_k}(x) = 0,$$

puis en faisant $n \rightarrow \infty$:

$$F(x) = 0 = f(x),$$

d'où trivialement $\frac{1}{2} F(x) \leq f(x) \leq F(x)$, car $\frac{1}{2} 0 \leq 0 \leq 0$, c'est très vrai, mon bébé !

- Si maintenant $f(x) > 0$, il existe un unique $k_x \in \mathbb{Z}$ tel que $x \in E_{k_x}$, d'où pour tout $n \geq |k_x|$:

$$F_n(x) = 2^{k_x},$$

puis en faisant $n \rightarrow \infty$:

$$F(x) = 2^{k_x}.$$

Comme par définition de k_x on a :

$$\frac{1}{2} F(x) = 2^{k_x-1} < f(x) \leq 2^{k_x} = F(x),$$

en relaxant la « *strictitude* » de l'inégalité à gauche, nous obtenons bien $\frac{1}{2} F(x) \leq f(x) \leq F(x)$.

(e) Comme $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ est mesurable à valeurs positives finies, f est Lebesgue-intégrable (par définition !) si et seulement si $\int_{\mathbb{R}^d} f < \infty$. Or une intégration de l'encadrement de f par F obtenu à l'instant dans la question précédente donne :

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} F \leq \int_{\mathbb{R}^d} f \leq \int_{\mathbb{R}^d} F,$$

donc f est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^d si et seulement si F l'est.

Maintenant, il est temps d'observer que la suite $(F_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions positives est croissante :

$$F_{n+1}(x) - F_n(x) = 2^{-(n+1)} \mathbf{1}_{E_{-n-1}}(x) + 2^{n+1} \mathbf{1}_{E_{n+1}}(x) \geq 0,$$

ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence monotone pour obtenir :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} F &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} F_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} F_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left(\sum_{|k| \leq n} 2^k \mathbf{1}_{E_k} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{|k| \leq n} 2^k m(E_k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k m(E_k) \\ &\in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}, \end{aligned}$$

et donc on a bien :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f < \infty \iff \int_{\mathbb{R}^d} F < \infty \iff \sum_{k \in \mathbb{Z}} 2^k m(E_k).$$

(f) Avec un exposant $a \in \mathbb{R}$, la fonction :

$$f_a(x) := \begin{cases} |x|^{-a} & \text{lorsque } 0 < |x| < 1, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

est mesurable à valeurs ≥ 0 .

Puisque dans la boule unité fermée $\{|x| \leq 1\}$, on a $|x|^c \leq 1$ pour tout exposant réel $c \geq 0$, la fonction f_a est toujours intégrable lorsque $a \leq 0$.

Supposons donc $a > 0$, et, en application de ce qui précède, regardons, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, les ensembles :

$$\begin{aligned} E_k &= \{x \in \mathbb{R}^d : 2^{k-1} < f_a(x) \leq 2^k\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < |x| \leq 1 \text{ et } 2^{k-1} < \frac{1}{|x|^a} \leq 2^k\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^d : 0 < |x| \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2^{\frac{k}{a}}} \leq |x| < \frac{1}{2^{\frac{k-1}{a}}}\}, \end{aligned}$$

qui s'avèrent ainsi visuellement être une collection infinie d'anneaux (en dimension $d = 2$), ou de coquilles sphériques (en dimension $d = 3$), emboîtés.

Or lorsque $k \leq 0$, on voit que $E_k = \emptyset$, et donc seuls les E_k avec $k \geq 1$ interviennent.

Maintenant, grâce à la question (e), f est Lebesgue-intégrable si et seulement si :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k m(E_k) < \infty.$$

Mais chacune de ces coquilles d -dimensionnelles E_k avec $k \geq 1$ apparaît manifestement comme étant la dilatée du facteur $\frac{1}{2^{\frac{k}{a}}}$ de la coquille de référence :

$$\mathcal{C}_a := \{x \in \mathbb{R}^d : 1 \leq |x| < \frac{1}{2^{-\frac{1}{a}}}\},$$

évidemment de mesure strictement positive finie $0 < m(\mathcal{C}_a) < \infty$, et donc d'après la propriété naturelle de dilatation de la mesure de Lebesgue :

$$m(\lambda \cdot F) = \lambda^d m(F) \quad (\lambda > 0, F \subset \mathbb{R}^d \text{ mesurable}),$$

on obtient ici :

$$m(E_k) = \left(\frac{1}{2^{\frac{k}{a}}}\right)^d \cdot m(\mathcal{C}_a),$$

d'où enfin, en reconnaissant une série géométrique sérendipitrice :

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k m(E_k) = m(\mathcal{C}_a) \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(1-\frac{d}{a})} = \begin{cases} \infty & \text{lorsque } a \geq d, \\ m(\mathcal{C}_a) \frac{2^{(1-\frac{d}{a})}}{1 - 2^{(1-\frac{d}{a})}} & \text{lorsque } 0 < a < d, \end{cases}$$

ce qui montre que f_a est intégrable si et seulement si $a < d$.

Passons maintenant au cas — fort similaire ! — de la fonction :

$$g_b(x) := \begin{cases} |x|^{-b} & \text{là où } |x| \geq 1, \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Lorsque $b \geq 0$, elle est manifestement non-intégrable.

Supposons donc $b > 0$. Dans ce cas :

$$E_k = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \geq 1 \text{ et } \frac{1}{2^{\frac{k}{b}}} \leq |x| < \frac{1}{2^{\frac{k-1}{b}}}\},$$

avec $E_k = \emptyset$ pour $k \geq 1$. Toujours avec :

$$\mathcal{C}_b := \left\{ x \in \mathbb{R}^d : 1 \leq |x| < \frac{1}{2^{-\frac{1}{b}}} \right\},$$

on vérifie que :

$$\sum_{k=-\infty}^0 2^k m(E_k) = m(\mathcal{C}_b) \sum_{k=-\infty}^0 2^{k(1-\frac{d}{b})} = \begin{cases} \infty & \text{lorsque } 0 < b \leq d, \\ m(\mathcal{C}_b) \frac{1}{1 - 2^{\frac{d}{b}-1}} & \text{lorsque } b > d, \end{cases}$$

ce qui montre que g_b est intégrable si et seulement si $b > d$.

Exercice 3. Soit $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle quelconque, pas forcément bornée. Dans la définition des sommes de Darboux associées à des subdivisions $\Delta \subset [a, b]$, il se peut alors que l'infimum de f sur un intervalle de la subdivision (ou son supremum) soit infini, auquel cas la somme de Darboux correspondante est infinie. Dans tous les cas rien ne nous empêche de vérifier si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une subdivision de $[a, b]$:

$$\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\},$$

telle que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq \varepsilon.$$

Supposons cette condition vérifiée pour un $\varepsilon > 0$ fixé, et montrons qu'alors f est nécessairement bornée. Raisonnons par l'absurde et supposons f non bornée, par exemple $\sup_{[a,b]} f = +\infty$. Alors il existe un entier $1 \leq k \leq n$ tel que sur $I_k = [x_{k-1}, x_k]$, on a $\sup_{I_k} f = +\infty$ et donc $\Sigma^\Delta(f) = +\infty$. Mais alors

$$\Sigma_\Delta(f) \geq \Sigma^\Delta(f) - \varepsilon = +\infty.$$

Cela entraîne que sur un certain intervalle $I_l = [x_{l-1}, x_l]$, on a $\inf_{I_l} f = +\infty$, ce qui est impossible, car on considère des fonctions dont toutes les valeurs sont réelles. En conclusion, si une fonction vérifie la définition de Riemann-intégrabilité, elle est nécessairement bornée.

Une autre démonstration possible part d'une caractérisation obtenue dans le cours : une fonction $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un intervalle compact $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est Riemann-intégrable si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier encadrant f :

$$f_{1,\varepsilon}^{\text{esc}} \leq f \leq f_{2,\varepsilon}^{\text{esc}},$$

telles que :

$$(0 \leq) \quad \int_a^b f_{2,\varepsilon}^{\text{esc}} - \int_a^b f_{1,\varepsilon}^{\text{esc}} \leq \varepsilon.$$

La fonction f sera de nouveau implicitement bornée, puisque les fonctions en escalier sont (par nature) bornées.

Exercice 4. Cela apparaît explicitement dans le cours, mais refaisons la démonstration. Quitte à renuméroter la suite, on peut supposer que $k_0 = 1$ après élimination des ensembles E_1, \dots, E_{k_0-1} qui ne comptent pas dans l'intersection infinie. Posons $E := \bigcap_{k=1}^\infty E_k$, et considérons alors les différences :

$$E_k \setminus E_{k+1} \quad (k \geq 1),$$

de telle sorte qu'on peut représenter sous forme de réunion disjointe :

$$E_1 = E \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_k \setminus E_{k+1}).$$

Grâce au théorème d'additivité dénombrable disjointe, on peut alors calculer :

$$\begin{aligned} m(E_1) &= m(E) + \lim_{K \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{K-1} [m(E_k) - m(E_{k+1})] \\ &= m(E) + m(E_1) - \lim_{K \rightarrow \infty} m(E_K). \end{aligned}$$

Puisque $m(E_1) < \infty$, à gauche et à droite, on a des nombres réels positifs finis, donc après simplification :

$$m(E) = \lim_{K \rightarrow \infty} m(E_K).$$

Sans l'hypothèse que $m(E_k) < \infty$ à partir d'un certain rang $k \geq k_0$, l'énoncé est faux, car si on prend par exemple $E_k := [k, \infty[\subset \mathbb{R}$, alors $\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = \emptyset$ tandis que $m(E_k) = \infty$ pour tout $k \geq 1$, ce qui entraîne la non-coïncidence :

$$m\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k\right) = 0 \neq \infty = \lim_{K \rightarrow \infty} m(E_K).$$

Exercice 5. (a) Pour prouver l'égalité demandée, on va raisonner par double inégalité.

• Avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, soit $\cup_{j=1}^J I_j$ un recouvrement de E par un nombre fini d'intervalles fermés tels que :

$$\sum_{j=1}^J |I_j| \leq m_J^*(E) + \varepsilon.$$

Alors en utilisant le fait qu'une réunion *finie* de fermés est fermée, il vient en prenant les adhérences :

$$\overline{E} \subset \overline{\bigcup_{1 \leq j \leq J} I_j} = \bigcup_{1 \leq j \leq J} I_j.$$

Donc $\cup_{j=1}^J I_j$ est aussi un recouvrement de la fermeture \overline{E} par un nombre fini d'intervalles fermés, ce qui implique par définition de $m_J^*(\overline{E})$:

$$m_J^*(\overline{E}) \leq \sum_{j=1}^J |I_j|.$$

Cette inégalité étant vraie pour tout recouvrement de E , on peut passer à l'infimum, c'est-à-dire faire $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, pour obtenir une première inégalité :

$$m_J^*(\overline{E}) \leq m_J^*(E).$$

• L'inégalité inverse est plus « naturelle-automatique », donc plus facile. En effet, si $\cup_{j=1}^J I_j$ est un recouvrement de \overline{E} par un nombre fini intervalles fermés, alors l'inclusion :

$$E \subset \overline{E} \subset \bigcup_{1 \leq j \leq J} I_j,$$

fait voir que $\cup_{j=1}^J I_j$ est aussi un recouvrement de E , ce qui donne $m_J^*(E) \leq \sum_{j=1}^J |I_j|$, puis en prenant l'infimum, l'inégalité inverse conclusive :

$$m_J^*(E) \leq m_J^*(\overline{E}).$$

Notons qu'en réalité, nous venons simplement de ré-utiliser le fait connu que la mesure extérieure de Jordan est croissante sur toute inclusion telle que $E \subset \overline{E}$.

(b) On cherche ici un ensemble dénombrable de mesure de Borel-Lebesgue nulle dont l'adhérence soit de mesure grande au sens de Jordan. Il vient naturellement à l'esprit de regarder :

$$E := \mathbb{Q} \cap [0, 1],$$

qui a pour adhérence $\overline{E} = [0, 1]$.

Cet ensemble E est dénombrable car \mathbb{Q} l'est, donc mesurable de mesure de Borel-Lebesgue $m(E) = m^*(E) = 0$.

Mais d'après la question précédente,

$$m_J^*(E) = m_J^*(\overline{E}) = m_J^*([0, 1]) = 1,$$

puisque Jordan n'a pas fait la bêtise de ne pas attribuer 1 comme mesure — et comme mesure extérieure ! — à l'intervalle unité $[0, 1]$, ce qu'on peut vérifier rapidement comme suit.

Tout recouvrement $\cup_{j=1}^J I_j$ de $[0, 1]$ par des intervalles vérifie nécessairement $\sum_{j=1}^J |I_j| \geq 1$, et comme on a même égalité en utilisant le recouvrement $I_1 = [0, 1]$, nous déduisons bien que $m_J^*([0, 1]) = 1$.

Exercice 6. Les complémentaires des sous-ensembles $A_i \subset \mathbb{R}^d$ seront notés de manière abrégée :

$$\mathbb{R}^d \setminus A_i =: A_i^c \quad (i = 1, 2, 3 \dots).$$

Pour la formule visée, le cas $n = 1$ est trivial, tandis que le cas $n = 2$ se démontre en partant des trois réunions *disjointes* :

$$\begin{aligned} A_1 \cup A_2 &= (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2), \\ A_1 &= (A_1 \cap A_2^c) \cup (A_1 \cap A_2), \\ A_2 &= (A_1 \cap A_2) \cup (A_1^c \cap A_2), \end{aligned}$$

dont on n'hésite pas à prendre les mesures :

$$\begin{aligned} m(A_1 \cup A_2) &= m(A_1 \cap A_2^c) + m(A_1 \cap A_2) + m(A_1^c \cap A_2), \\ m(A_1) &= \underline{m(A_1 \cap A_2^c)} + m(A_1 \cap A_2), \\ m(A_2) &= m(A_1 \cap A_2) + \underline{m(A_1^c \cap A_2)}, \end{aligned}$$

et en remplaçant dans la première ligne les valeurs soulignées dans les lignes 2 et 3, on obtient bien après petit toilettage arithmétique :

$$m(A_1 \cup A_2) = m(A_1) + m(A_2) - m(A_1 \cap A_2).$$

Ce cas $n = 2$ n'a l'air de rien, mais maintenant que nous décidons gaillardement de passer à l'implication de récurrence majeure, en supposant atteint le niveau n , pour démarrer

en direction du niveau $n + 1$, il s'avère naturel d'utiliser ce qui vient d'être vu :

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= m\left(\underbrace{\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right)}_{A'_1} \cup \underbrace{A_{n+1}}_{A'_2}\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + m(A_{n+1}) - m\left(\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \cap A_{n+1}\right) \\ &= m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) + m(A_{n+1}) - m\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right), \end{aligned}$$

pour observer qu'au premier et au troisième termes ainsi apparaissant, on peut appliquer en douceur l'hypothèse de récurrence, tout d'abord sans modification et sans effort au premier :

$$m\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} m(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\right),$$

puis avec un peu plus d'intentions esthétiques au troisième :

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^n (A_i \cap A_{n+1})\right) &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} m\left((A_{i_1} \cap A_{n+1}) \cap \dots \cap (A_{i_k} \cap A_{n+1})\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} m(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k} \cap A_{n+1})\right) \\ \text{[Changer } \ell := k + 1] &= \sum_{\ell=2}^{n+1} \left((-1)^\ell \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell-1} \leq n \\ i_\ell = n+1}} m(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1})\right), \end{aligned}$$

cette dernière somme multiple pouvant d'ailleurs être interprétée — agréablement pour la suite — avec un ℓ -ème indice i_ℓ égal à $n + 1$:

$$\sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell-1} \leq n \\ i_\ell = n+1}},$$

car en effet, si nous revenons à ce dont nous étions partis et si nous y insérons les formules que nous venons de façonner — le deuxième terme ne quittant pas sa douillette place —, il vient :

$$\begin{aligned} m\left(\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i\right) &= \sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} m(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})\right) + m(A_{n+1}) - \\ &\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} \left((-1)^\ell \sum_{\substack{1 \leq i_1 < \dots < i_{\ell-1} \leq n \\ i_\ell = n+1}} m(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1})\right) \\ &= \sum_{\ell=1}^{n+1} \left((-1)^{\ell-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n+1} m(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell})\right), \end{aligned}$$

et le résultat n'est autre que la formule désirée au niveau $n + 1$, puisque la première somme rassemble exactement toutes les intersections dans lesquelles ne figure pas A_{n+1} , tandis

que dans la deuxième somme (troisième terme), on trouve toutes les intersections de plus de deux ensembles A_i parmi lesquels figure A_{n+1} .

Exercice 7. Pour construire un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ dense et de mesure $m(\Omega) \leq \varepsilon$ arbitrairement petite, on pense spontanément à l'ensemble $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ des rationnels, et comme \mathbb{Q} n'est pas ouvert, il vient à l'esprit de former des intervalles ouverts de taille ajustée autour de ses points et qui rétrécissent suffisamment vite.

Plus précisément, si $(r_n)_{n=1}^\infty$ est une énumération (bijective) des points (dénombrables) de \mathbb{Q} , essayons :

$$\Omega := \bigcup_{n=1}^{\infty}]r_n - \alpha_n, r_n + \alpha_n[,$$

où $\alpha_n > 0$ pour tout $n \geq 1$, de telle sorte que Ω est automatiquement ouvert. De plus Ω sera *de facto* dense dans \mathbb{R} , simplement parce qu'il contient :

$$\Omega \supset \bigcup_{n=1}^{\infty} \{r_n\} = \mathbb{Q}.$$

Majorons maintenant sa mesure :

$$\begin{aligned} m(\Omega) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} m(]r_n - \alpha_n, r_n + \alpha_n[) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n. \end{aligned}$$

Il suffit alors pour conclure de choisir $\alpha_n := \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{2^n}$ pour atteindre $m(\Omega) \leq \varepsilon$, grâce à Achille $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ qui rejoint la Tortue.

Exercice 8. Puisque f est à support compact dans \mathbb{R}^d , il existe $R \gg 1$ assez grand pour que :

$$\text{supp } f \subset B(0, R).$$

Soit un vecteur $h \in \mathbb{R}^d$ de norme $|h| < 1$. Nous affirmons que la fonction continue :

$$x \mapsto |f(x-h) - f(x)|$$

est à support inclus dans la boule ouverte $B(0, R+1)$. En effet, pour $x \notin B(0, R+1)$ quelconque, *i.e.* avec $|x| \geq R+1$, on a par inégalité triangulaire :

$$|x-h| \geq |x| - |h| \geq R+1 - |h| > R+1 - 1 = 1,$$

ce qui garantit que $f(x-h) = 0$, et comme on a évidemment aussi $f(x) = 0$, ceci prouve notre affirmation.

Soit maintenant $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. La fonction f étant continue, elle est uniformément continue sur le compact (boule fermée) $\bar{B}(0, R+2)$, à savoir, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, qu'on peut — et qu'on va ! — supposer $\delta \leq 1$, tel que :

$$\forall |x| \leq R+1 \quad \forall |h| \leq \delta \quad |f(x-h) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-h) - f(x)| dx &= \int_{B(0,R+1)} |f(x-h) - f(x)| \\ &\leq \int_{B(0,R+1)} \varepsilon dx \\ &= \varepsilon m(B(0, R+1)), \end{aligned}$$

quantité qui tend vers 0 avec $\varepsilon \xrightarrow{>} 0$, puisque le volume d -dimensionnel :

$$0 < m(B(0, R+1)) = |B(0, R+1)| < \infty$$

de la boule en question est bien entendu fini.

Remarquons qu'on peut démontrer avec des moyens plus sophistiqués que le volume d -dimensionnel d'une boule (ouverte ou fermée) de rayon $R > 0$ dans \mathbb{R}^d vaut :

$$|B(0, R)| = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2} + 1)} R^d,$$

où Γ est la *fonction Gamma* d'Euler, définie pour $x > 0$ par :

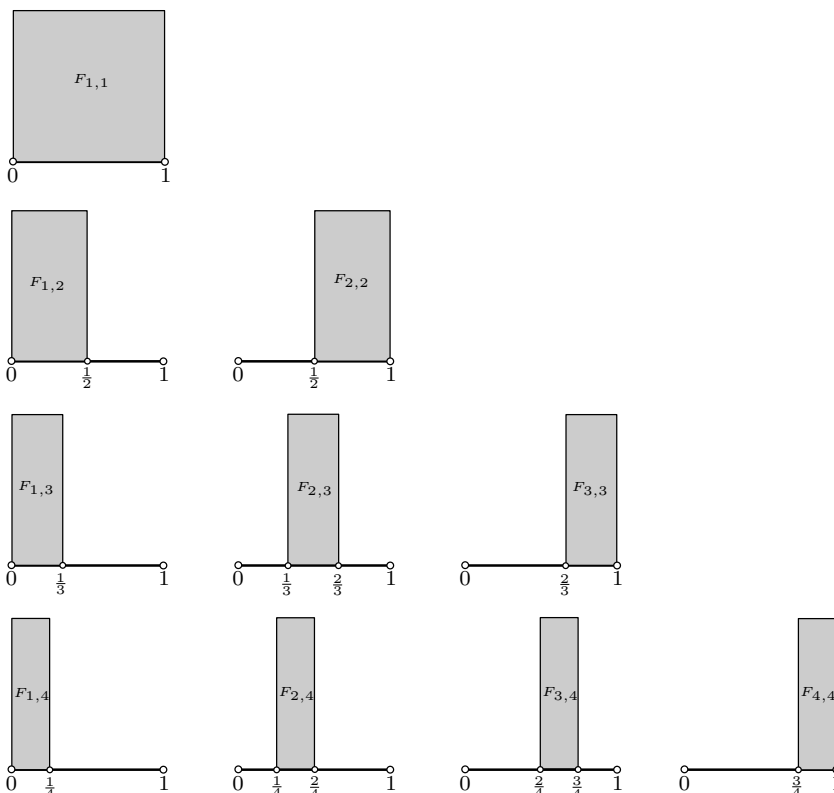
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt,$$

et qui peut être considérée comme un prolongement de la factorielle aux nombres réels, sachant que $\Gamma(n+1) = n!$ (exercice !) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9. Un simple dessin convainc que la suite $(f_n(x))_{n=1}^\infty$:

$$\begin{array}{llll} f_1 := F_{1,1}, & & & \\ f_2 := F_{1,2}, & f_3 := F_{2,2}, & & \\ f_4 := F_{1,3}, & f_5 := F_{2,3}, & f_6 := F_{3,3}, & \\ f_7 := F_{1,4}, & f_8 := F_{2,4}, & f_9 := F_{3,4}, & f_{10} := F_{4,4}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

prend une infinité de fois les deux valeurs 0 et 1 en tout point $x \in [0, 1]$ fixé, tandis que $\int_0^1 f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, car la largeur des gratte-ciels de hauteur constamment égale à 1 qui glissent de la gauche vers la droite tend à rétrécir indéfiniment. Le voici, ce dessin !



Ainsi, il faut renuméroter tout cela. Comme la suite :

$$\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)_{m=1}^{\infty} = \{1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 35, \dots\}$$

est strictement croissante, à tout $n \geq 1$ est associé un unique entier $m = m_n \geq 1$ encadrant :

$$\frac{m_n(m_n+1)}{2} + 1 \leq n \leq \frac{(m_n+1)(m_n+2)}{2},$$

l'écart entre ces deux extrémités valant :

$$\frac{(m_n+1)(m_n+2)}{2} - \frac{m_n(m_n+1)}{2} = m_n,$$

et donc, à tout $n \geq 1$ est associé un unique couple (m_n, k_n) avec $1 \leq k_n \leq m_n$ le représentant sous la forme :

$$n = \frac{m_n(m_n+1)}{2} + k_n.$$

Clairement :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty,$$

car une des inégalités ci-dessus donne $\sqrt{2n} \leq m_n + 2$.

Ainsi, grâce à la renumérotation offerte par ces couples (k_n, m_n) , on a généralement :

$$f_n(x) := F_{k_n, m_n}(x),$$

et donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \int_0^1 F_{k_n, m_n}(x) dx \\ &= \int_0^1 \mathbf{1}_{\left[\frac{k_n-1}{m_n}, \frac{k_n}{m_n}\right]}(x) dx \\ &= \frac{1}{m_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer que la suite $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ des valeurs des f_n en tout point fixé $x \in [0, 1]$ n'est pas convergente, il suffit d'expliquer l'assertion suivante :

En tout $x \in [0, 1]$, la suite des valeurs $(f_n(x))_{n=1}^\infty$ prend une infinité de fois la valeur 0, et aussi une infinité de fois la valeur 1.

En effet, puisque $(f_n)_{n=1}^\infty$ n'est qu'une renumérotation, il suffit de montrer que la suite double :

$$(F_{k,m})_{\substack{1 \leq m < \infty \\ 1 \leq k \leq m}}$$

fait ce qui est affirmé.

Visuellement, il est transparent que la valeur 0 est prise très souvent, sûrement une infinité de fois ! Pour s'en convaincre rigoureusement, fixons $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$, le cas $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ se traitant de manière similaire. Or dès que $m \geq 3$, on a $\frac{1}{2} \leq \frac{m-1}{m}$, et donc :

$$F_{m-1, m}(x) = \mathbf{1}_{\left[\frac{m-1}{m}, m\right]}(x) = 0,$$

donc la valeur 0 est prise par toutes ces $(F_{m-1, m})_{m=1}^\infty$ — et beaucoup d'autres ! —, en nombre infini.

Quant à la valeur 1, c'est presque aussi simple, car en $x \in [0, 1]$ fixé, pour tout $m \geq 1$, comme :

$$\bigcup_{k=1}^m \left[\frac{k-1}{m}, \frac{k}{m}\right] = [0, 1],$$

il existe au moins un entier $k_{x,m}$ avec $1 \leq k_{x,m} \leq m$ tel que :

$$1 = \mathbf{1}_{\left[\frac{k_{x,m}-1}{m}, \frac{k_{x,m}}{m}\right]}(x) = F_{k_{x,m}, m}(x),$$

et ces $(F_{k_{x,m}, m})_{m=1}^\infty$ sont manifestement infiniment nombreuses.

3. Examen 2

Exercice 1. (a) Montrer que ni l'inclusion $L^1(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, ni celle $L^2(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$ ne sont vraies. Indication : supposer $d = 1$ et penser à $\frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \mathbf{1}_{]0,1[}$ ainsi qu'à $\frac{1}{x} \cdot \mathbf{1}_{[1,\infty[}$.

(b) Montrer que si une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ est définie sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, alors $f \in L^2(E, \mathbb{C})$ implique $f \in L^1$ avec :

$$\|f\|_{L^1} \leq \sqrt{m(E)} \|f\|_{L^2}.$$

(c) Montrer que si f est bornée, i.e. si $|f(x)| \leq C < \infty$, et si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, alors $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ avec :

$$\|f\|_{L^2} \leq \sqrt{C} \sqrt{\|f\|_{L^1}}.$$

Exercice 2. (a) Établir l'existence de la limite suivante, et déterminer sa valeur :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{4t^3 + 12}{12t^6 + 3nt + 2} dt.$$

Indication: Utiliser le théorème de convergence dominée.

(b) Faire de même pour :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(nx)}{n \sin x} dx.$$

Indication: Découper l'intégrale en $\int_0^\delta + \int_\delta^{\pi/2}$.

Exercice 3. (a) Montrer pour $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ continue à support compact que l'on a :

$$0 = \lim_{\delta \rightarrow 1} \|f(x) - f(\delta x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(b) Généraliser cela aux fonctions $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ Lebesgue-intégrables quelconques.

Exercice 4. [Inégalité de Hardy dans L^p] Soit un nombre réel $1 < p < \infty$. L'objectif est d'étudier l'opérateur qui, à une fonction $f \in L^p(]0, \infty[, \mathbb{C})$, associe la fonction :

$$x \mapsto T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \quad (0 < x < \infty).$$

(a) Rappeler la valeur de l'exposant conjugué de p , dans l'inégalité de Hölder.

(b) Montrer que cette fonction $x \mapsto T(f)(x)$ est bien définie pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

(c) Montrer que si $g \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$, alors g et $T(g)$ sont liées par une équation différentielle, que l'on explicitera.

(d) Montrer que si $g \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$ est à support dans $[a, A]$ avec $0 < a \leq A < \infty$, alors :

$$|T(g)(x)| \leq \frac{(A - a)^{1 - \frac{1}{p}} \|g\|_{L^p}}{x}.$$

(e) Montrer que $x [T(g)(x)]^p$ tend vers 0 quand $x \rightarrow \infty$.

(f) On suppose temporairement que $g \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ prend des valeurs réelles positives. En exécutant une intégration par parties, et en utilisant ce qui précède, montrer que :

$$(\|T(g)\|_{L^p})^p = -p \int_0^\infty g T(g)^{p-1} + p \int_0^\infty T(g)^p.$$

(g) Toujours pour $g \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$, montrer en utilisant l'inégalité de Hölder que :

$$\|T(g)\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|g\|_{L^p}.$$

(h) Montrer que si une suite $(g_n)_{n=1}^\infty$ de fonctions continues positives $g_n \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ converge en norme L^p vers une fonction-limite (positive) $f \in L^p(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n)(x) = T(f)(x) \quad (\forall x > 0).$$

(i) Montrer que l'inégalité précédente est maintenant vraie pour toute fonction $f \in L^p(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$:

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p}.$$

Indication: Utiliser Fatou.

(j) Montrer qu'elle demeure encore vraie pour toute fonction à valeurs complexes $f \in L^p(]0, \infty[, \mathbb{C})$.

(k) Trouver un exemple de fonction $f \in L^1(]0, \infty[)$ telle que $T(f) \notin L^1(]0, \infty[)$.

(l) Montrer qu'il n'est pas possible de remplacer la constante $\frac{p}{p-1}$ par une constante plus petite. Indication: On pourra considérer la suite de fonctions $(t \mapsto t^{-\frac{1}{p}} \cdot \mathbf{1}_{[1, n]})_{n=1}^\infty$.

(m) Examiner le cas $p = \infty$.

Exercice 5. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables $f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Lebesgue-intégrables convergeant presque partout vers une certaine fonction-limite :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d),$$

mesurable et intégrable qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n.$$

(a) On suppose toutes les $f_n \geq 0$ positives, et on introduit la suite auxiliaire $g_n := \min(f_n, f)$. Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

Indication: Penser à Fatou !

(b) Toujours en supposant toutes les $f_n \geq 0$ positives, montrer que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| dx.$$

(c) Montrer que la suite :

$$h_n(x) = n^d \mathbf{1}_{]0, \frac{1}{n}[^d}(x) - n^d \mathbf{1}_{] - \frac{1}{n}, 0[^d}(x) \quad (n \geq 1)$$

converge ponctuellement vers 0 et que $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n$.

(d) La suite $(h_n)_{n=1}^\infty$ converge-t-elle vers 0 dans un $L^p(\mathbb{R}^d)$ pour $1 \leq p < \infty$?

Exercice 6. [Espaces de Sobolev] Ici, toutes les fonctions sont supposées à valeurs dans \mathbb{R} . On note \mathcal{S} le \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $L^2(]0, 1[)$ constitué des fonctions $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{C}$ de carré intégrable pour lesquelles il existe une fonction notée $\Lambda_f \in L^2(]0, 1[)$ vérifiant :

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \Lambda_f(x) \varphi(x) dx,$$

pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(]0, 1[, \mathbb{C})$ de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, 1[$ et dont le support :

$$\text{supp } \varphi \stackrel{\text{def}}{:=} \overline{\{t \in]0, 1[: \varphi(t) \neq 0\}}$$

est un sous-ensemble *compact* de $]0, 1[$.

(a) En admettant la densité de \mathcal{C}_c^1 dans \mathcal{C}_c^0 , montrer que \mathcal{S} est un sous-ensemble dense de $L^2(]0, 1[)$.

(b) Montrer que :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}} := \int_0^1 f(x) g(x) dx + \int_0^1 \Lambda_f(x) \Lambda_g(x) dx$$

définit un produit scalaire sur \mathcal{S} .

(c) Montrer que \mathcal{S} , muni de ce produit scalaire, est un espace de Hilbert.

Exercice 7. [Bases produits] Montrer que si $(\varphi_i(x))_{i=1}^\infty$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1}, \mathbb{C})$ et si $(\psi_j(y))_{j=1}^\infty$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{C})$, alors :

$$(\varphi_i(x) \psi_j(y))_{i,j=1}^\infty$$

forme une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}, \mathbb{C})$.

4. Corrigé de l'examen 2

Exercice 1. (a) En dimension $d = 1$, la fonction positive :

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$$

appartient à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_0^1 = 2,$$

mais n'appartient pas à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x} dx = \log 1 - \log 0 = \infty,$$

ce qui montre que $L^1(\mathbb{R}) \not\subset L^2(\mathbb{R})$.

De manière quelque peu similaire bien qu'inversée, la fonction positive :

$$x \mapsto \frac{1}{x} \mathbf{1}_{[1,\infty[}(x)$$

n'appartient pas à $L^1(\mathbb{R})$:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} dx = \log \infty - \log 1 = \infty,$$

mais appartient à $L^2(\mathbb{R})$:

$$\int_1^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^2 dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty = 1,$$

ce qui montre que $L^2(\mathbb{R}) \not\subset L^1(\mathbb{R})$.

(b) Toutefois, sur tout sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ de mesure $m(E) < \infty$, l'inclusion :

$$L^2(E, \mathbb{C}) \subset L^1(E, \mathbb{C}),$$

est toujours vraie, grâce à une application astucieuse standard de l'inégalité de Cauchy-Schwarz qui consiste à faire apparaître un facteur '1' invisible :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^1(E)} &= \int_E |f(x)| dx = \int_E |f(x)| \cdot 1 dx \leq \left(\int_E |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_E 1^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \|f\|_{L^2(E)} \sqrt{m(E)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce, pour toute fonction $f \in L^2(E, \mathbb{C})$.

(c) Enfin, sur $E = \mathbb{R}^d$, donc au contraire en mesure infinie, si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ est *bornée* :

$$|f(x)| \leq C < \infty \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d),$$

alors la norme L^2 de f s'estime « brutalement » par :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^{1+1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(C \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)| dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{C} \sqrt{\|f\|_{L^1}}. \end{aligned}$$

Exercice 2. (a) La suite de fonctions à intégrer, indexée par un entier $n \geq 0$, admet, par exemple, la fonction-dominante indépendante de n suivante :

$$\frac{4t^3 + 12}{12t^6 + 3nt + 2} \leq \frac{4t^3 + 12}{12t^6 + 2} = \frac{2t^3 + 6}{6t^6 + 1},$$

et l'on voit grâce à $\int_1^\infty \frac{1}{t^3} dt < \infty$ que :

$$\int_0^\infty \frac{2t^3 + 6}{6t^6 + 1} dt < \infty.$$

Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique et donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{4t^3 + 12}{12t^6 + 3nt + 2} dt = \int_0^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4t^3 + 12}{12t^6 + 3nt + 2} dt = \int_0^\infty 0 = 0.$$

(b) Rappelons pour débiter que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$:

$$\frac{2}{\pi} x \leq \sin x \leq x,$$

ce qui a été vu en cours. Ainsi :

$$\frac{\sin(nx)}{n \sin x} \leq \frac{nx}{n \sin x} = \frac{x}{\sin x} \leq \frac{\pi}{2},$$

et en découpant $\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\delta + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}}$ avec $\delta > 0$ petit, on majore :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n \sin x} dx \leq \delta \frac{\pi}{2} + \int_\delta^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\frac{\sin(nx)}{n \sin x}}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0} dx,$$

ce qui démontre (exercice mental) que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(nx)}{n \sin x} dx = 0.$$

Exercice 3. (a) Lorsque $f \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ est continue à support compact, disons $\text{supp } f \subset B(0, R)$, une boule ouverte centrée en l'origine de rayon $R \gg 1$ assez grand, la domination uniforme en le paramètre dilatoire $\frac{1}{2} \leq \delta \leq 2$:

$$|f(x) - f(\delta x)| \leq 2 \max_{\mathbb{R}^d} |f| \cdot \mathbf{1}_{B(0, 2R)},$$

par une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}^d)$, assure qu'on peut appliquer le théorème de convergence dominée, qui donne effectivement :

$$\lim_{\delta \rightarrow 1} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f(\delta x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{\delta \rightarrow 1} |f(x) - f(\delta x)| dx = \int_{\mathbb{R}^d} 0 = 0.$$

(b) Comme prévisible, le même résultat pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ — circonstance plus générale — s'obtient grâce à un raisonnement par densité standard.

En effet, comme \mathcal{C}_c^0 est dense dans L^1 , pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction $g_\varepsilon \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$ telle que :

$$\|f - g_\varepsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Maintenant, le résultat de la Question (a) s'applique à g_ε , et donne un $\delta(\varepsilon) > 0$ assez petit pour que :

$$|\delta - 1| \leq \delta(\varepsilon) \implies \|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(\delta x)\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

Alors par inégalité triangulaire, toujours pour $|\delta - 1| \leq \delta(\varepsilon)$, on estime :

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(\delta x)\|_{L^1} &= \|f(x) - g_\varepsilon(x) + g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(\delta x) + g_\varepsilon(\delta x) - f(\delta x)\|_{L^1} \\ &\leq \|f(x) - g_\varepsilon(x)\|_{L^1} + \|g_\varepsilon(x) - g_\varepsilon(\delta x)\|_{L^1} + \|g_\varepsilon(\delta x) - f(\delta x)\|_{L^1} \\ &\leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned}$$

Exercice 4. Avec un exposant $1 < p < \infty$, à une fonction $f \in L^p(]0, \infty[, \mathbb{C})$, associons donc sa transformée de Hardy :

$$x \mapsto T(f)(x) := \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt,$$

définie pour $x > 0$.

(a) L'exposant conjugué de p est l'unique nombre réel $1 \leq p' < \infty$ satisfaisant $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$, et il vaut :

$$p' = \frac{p}{p-1}.$$

(b) Pour $x > 0$ quelconque, et $f \in L^p(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$ arbitraire, une application avisée de l'inégalité de Hölder permet de majorer :

$$\begin{aligned} T(f)(x) &= \frac{1}{x} \int_0^x f(t) \cdot 1 dt \\ &\leq \frac{1}{x} \left(\int_0^x |f(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_0^x 1^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \|f\|_{L^p} \cdot x^{\frac{1}{p'}-1} = \|f\|_{L^p} \cdot x^{-\frac{1}{p}} < \infty, \end{aligned}$$

pour constater agréablement que la valeur de $T(f)(x)$ est finie en tout $x > 0$.

(c) En effet, une différentiation par rapport à x de la définition $T(g)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x g(t) dt$ — justifiée car avec $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{C})$, le cours a montré que $x \mapsto \int_0^x g(t) dt$ est \mathcal{C}^1 — donne :

$$\begin{aligned} T(g)'(x) &= -\frac{1}{x^2} \int_0^x g(t) dt + \frac{1}{x} g(x) \\ &= -\frac{1}{x} T(g)(x) + \frac{1}{x} g(x), \end{aligned}$$

ce qu'on peut ré-écrire :

$$(x T(g)(x))' = g(x),$$

ou encore :

$$0 = -x T(g)'(x) - T(g)(x) + g(x).$$

(d) Comme $g \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{C})$ est supposée à support dans $[a, A]$ avec $0 < a \leq A < \infty$, on a clairement :

$$\forall 0 < x < a \quad T(g)(x) = \int_0^x 0 = 0,$$

puis, pour $a \leq x$, toujours grâce à Hölder :

$$\begin{aligned} |T(g)(x)| &= \frac{1}{x} \left| \int_a^x g(t) \mathbf{1}_{[a,A]}(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} \left(\int_a^x |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^x (\mathbf{1}_{[a,A]}(t))^{p'} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq \frac{1}{x} \left(\int_a^A |g(t)|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^A 1 dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \frac{1}{x} \|g\|_{L^p} \cdot (A-a)^{1-\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

(e) Toujours avec $\text{supp } g \subset [a, A]$, grâce à cette inégalité :

$$|T(g)(x)| \leq \frac{C}{x} \quad (C \geq 0)$$

il est clair qu'en se souvenant de l'hypothèse $p > 1$, on a un majorant qui tend vers zéro :

$$\begin{aligned} x |T(g)(x)|^p &\leq x \frac{C^p}{x^p} \\ &= \frac{C^p}{x^{p-1}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

ce qui livre le résultat.

(f) Soit donc $g \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_+)$ à valeurs positives, ce qui entraîne que $T(g)(x) \geq 0$ aussi. Pour estimer :

$$\begin{aligned} (\|T(g)\|_{L^p})^p &= \int_0^\infty |T(g)(x)|^p dx \\ &= \int_0^\infty 1 \cdot (T(g)(x))^p dx, \end{aligned}$$

on effectue effectivement une intégration par parties en prenant la primitive du facteur artificiel 1 :

$$\begin{aligned} (\|T(g)\|_{L^p})^p &= \left[x (T(g)(x))^p \right]_0^\infty - \int_0^\infty x \, p T(g)'(x) (T(g)(x))^{p-1} dx \\ \text{[Question (e)]} \quad &= \lim_{x \rightarrow \infty} \underbrace{x (T(g)(x))^p}_0 - \underbrace{0 (T(g)(0))^p}_0 - \text{même chose} \\ \text{[Question (e)]} \quad &= 0 - \int_0^\infty p \left[g(x) - T(g)(x) \right] (T(g)(x))^{p-1} dx \\ &= -p \int_0^\infty g T(g)^{p-1} + p \int_0^\infty T(g)^p. \end{aligned}$$

(g) Une réorganisation de l'identité qui précède permet de la ré-écrire sous une forme où il devient avisé d'appliquer — encore elle ! — l'inégalité de Hölder :

$$\begin{aligned}
 (\mathfrak{p} - 1) \left(\|T(g)\|_{L^{\mathfrak{p}}} \right)^{\mathfrak{p}} &= \mathfrak{p} \int_0^{\infty} g T(g)^{\mathfrak{p}-1} \\
 &\leq \mathfrak{p} \left(\int_0^{\infty} g^{\mathfrak{p}} \right)^{\frac{1}{\mathfrak{p}}} \left(\int_0^{\infty} T(g)^{(\mathfrak{p}-1)\mathfrak{p}'} \right)^{\frac{1}{\mathfrak{p}'}} \\
 &= \mathfrak{p} \|g\|_{L^{\mathfrak{p}}} \left(\left(\|T(g)\|_{L^{\mathfrak{p}}} \right)^{\mathfrak{p}} \right)^{\frac{1}{\mathfrak{p}'}} \\
 &= \mathfrak{p} \|g\|_{L^{\mathfrak{p}}} \left(\|T(g)\|_{L^{\mathfrak{p}}} \right)^{\mathfrak{p}-1},
 \end{aligned}$$

[($\mathfrak{p} - 1$) $\mathfrak{p}' = \mathfrak{p}$]

ce qui conduit bien à :

$$\|T(g)\|_{L^{\mathfrak{p}}} \leq \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} - 1} \|g\|_{L^{\mathfrak{p}}}.$$

(h) Soit donc $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions positives $g_n \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ satisfaisant $\|g_n - f\|_{L^{\mathfrak{p}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, pour une certaine fonction $f \in L^{\mathfrak{p}}(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$. Alors pour tout $x > 0$ fixé, l'inégalité de Hölder va encore abuser de ses charmes :

$$\begin{aligned}
 |T(g_n)(x) - T(f)(x)| &= |T(g_n - f)(x)| = \left| \frac{1}{x} \int_0^x (g_n(x) - f(x)) \cdot 1 \, dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{x} \left(\int_0^x |g_n(x) - f(x)|^{\mathfrak{p}} \, dx \right)^{\frac{1}{\mathfrak{p}}} \left(\int_0^x 1^{\mathfrak{p}'} \, dx \right)^{\frac{1}{\mathfrak{p}'}} \\
 &= \frac{1}{x} \|g_n - f\|_{L^{\mathfrak{p}}} x^{\frac{1}{\mathfrak{p}'}} \\
 &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.
 \end{aligned}$$

(i) Par densité de $\mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ dans $L^{\mathfrak{p}}(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$, si $f \in L^{\mathfrak{p}}(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ est donnée, il existe une suite $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions $g_n \in \mathcal{C}_c^0(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$ telle que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|f - g_n\|_{L^{\mathfrak{p}}}.$$

En utilisant le résultat de la question qui précède sous la forme :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} T(g_n)(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(g_n)(x) = T(f)(x) \quad (\forall x > 0),$$

on peut majorer patiemment :

$$\begin{aligned}
 \left(\|T(f)\|_{L^{\mathfrak{p}}} \right)^{\mathfrak{p}} &= \int_0^{\infty} |T(f)(x)|^{\mathfrak{p}} \, dx \\
 &= \int_0^{\infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} |T(g_n)(x)|^{\mathfrak{p}} \, dx \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |T(g_n)(x)|^{\mathfrak{p}} \, dx \\
 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} - 1} \right)^{\mathfrak{p}} (\|g_n\|_{L^{\mathfrak{p}}})^{\mathfrak{p}} \\
 &\leq \left(\frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{p} - 1} \right)^{\mathfrak{p}} (\|f\|_{L^{\mathfrak{p}}})^{\mathfrak{p}},
 \end{aligned}$$

[Fatou]

[Convergence des normes]

puisque la convergence supposée $\|g_n - f\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ en norme L^p implique la convergence dans \mathbb{R}_+ des normes L^p :

$$\|g_n\|_{L^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|f\|_{L^p},$$

énoncé vrai dans n'importe quel espace vectoriel normée $(E, \|\cdot\|_E)$:

$$\left(\|y_n - x\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0\right) \implies \left(\|y_n\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \|x\|_E\right),$$

ce dont on se convainc grâce à la majoration élémentaire :

$$\left|\|y_n\|_E - \|x\|_E\right| \leq \|y_n - x\|_E,$$

expliquée par inégalité triangulaire (signe opposé similaire) :

$$\|y_n\|_E - \|x\|_E = \|y_n - x + x\|_E - \|x\|_E \leq \|y_n - x\|_E + \underbrace{\|x\|_E}_{\circ} - \underbrace{\|x\|_E}_{\circ}.$$

(j) La fonction valeur absolue $|f|$ est encore dans L^p , et puisqu'elle prend des valeurs positives, la Question **(g)** s'applique à elle :

$$\|T(|f|)\|_{L^p} \leq \frac{p}{p-1} \| |f| \|_{L^p} = \frac{p}{p-1} \|f\|_{L^p},$$

et puis, des majorations naturelles conduisent à la généralisation désirée de l'inégalité de Hardy :

$$\begin{aligned} \left(\|T(f)\|_{L^p}\right)^p &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \right|^p dx \\ &\leq \int_0^\infty \left(\frac{1}{x} \int_0^x |f(t)| dt \right)^p dx \\ &= \int_0^\infty \left(T(|f|)(x) \right)^p dx \\ &= \left(\|T(|f|)\|_{L^p} \right)^p \\ &\leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p (\|f\|_{L^p})^p, \end{aligned}$$

dorénavant vraie pour les fonctions à valeurs complexes.

(k) Soit la fonction :

$$f(t) := \frac{1}{t^2} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(t),$$

qui appartient à $L^1(]0, \infty[, \mathbb{R}_+)$. Sa transformée de Hardy vaut 0 pour $0 < x \leq 1$, et pour $x \geq 1$:

$$T(g)(x) = \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \frac{1}{x} \left(1 - \frac{1}{x} \right) \geq 0,$$

d'où pour $x \geq 2$:

$$T(f)(x) \geq \frac{1}{x} \frac{1}{2},$$

ce qui fait qu'elle ne peut pas être dans L^1 .

(l) Pour $n \geq 1$ entier, soit donc la suite de fonctions :

$$f_n(t) := \frac{1}{t^{\frac{1}{n}}} \mathbf{1}_{[1, n]}(t).$$

Leurs normes L^p valent :

$$\|f_n\|_{L^p} = \left(\int_1^n \frac{1}{t} dt \right)^{\frac{1}{p}} = (\log n)^{\frac{1}{p}}.$$

Ensuite, leurs transformées de Hardy $T(f_n)(x)$, qui s'annulent bien sûr pour $0 < x \leq 1$ valent pour $1 \leq x \leq n$:

$$\begin{aligned} T(f_n)(x) &= \frac{1}{x} \int_1^x \frac{1}{t^{\frac{1}{p}}} dt = \frac{1}{x} \left[\frac{t^{-\frac{1}{p}+1}}{-\frac{1}{p}+1} \right]_1^x \\ &= \frac{1}{x} \left(\frac{x^{\frac{1}{p'}}}{\frac{1}{p'}} - \frac{1}{\frac{1}{p'}} \right) \\ &= p' \frac{x^{\frac{1}{p'}} - 1}{x}, \end{aligned}$$

et, par le même calcul dans lequel on remplace \int_1^x par \int_1^n , ces transformées valent pour $n \leq x$:

$$T(f_n)(x) = p' \frac{n^{\frac{1}{p'}} - 1}{x}.$$

Alors l'expression exacte de la puissance p -ème de la norme L^p de $T(f_n)$ est :

$$\begin{aligned} \left(\|T(f_n)\|_{L^p} \right)^p &= \int_1^\infty (T(f_n)(x))^p dx \\ &= (p')^p \int_1^n \frac{(x^{\frac{1}{p'}} - 1)^p}{x^p} dx + (p')^p \int_n^\infty \frac{(n^{\frac{1}{p'}} - 1)^p}{x^p} dx \\ &=: I_1(n, p) + I_2(n, p). \end{aligned}$$

La deuxième intégrale, positive, se calcule et se majore par une constante indépendante de n :

$$\begin{aligned} 0 \leq I_2(n, p) &= (p')^p (n^{\frac{1}{p'}} - 1)^p \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_n^\infty \\ &= (p')^p (n^{\frac{1}{p'}} - 1)^p \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \\ \left[\frac{p}{p'} = p-1 \right] &\leq (p')^p \frac{1}{n^{\frac{p}{p'}}} \frac{1}{p-1} \frac{1}{n^{p-1}} \\ &= \frac{(p')^p}{p-1}. \end{aligned}$$

Quant à la première, son intégrande a pour équivalent :

$$\left(\frac{x^{\frac{1}{p'}} - 1}{x} \right)^p = \left(\frac{1}{x^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{x} \right)^p \sim \frac{1}{x} \quad (\text{lorsque } x \rightarrow \infty),$$

donc :

$$I_1(n, p) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (p')^p \int_1^n \frac{1}{x} dx \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} (p')^p \log n,$$

ce qui donne :

$$\|T(f_n)\|_{L^p} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} p' (\log n)^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} (\log n)^{\frac{1}{p}}.$$

Pour terminer, supposons comme suggéré qu'une constante $0 < C_p < \infty$ dépendant de p satisfasse :

$$\|T(f)\|_{L^p} \leq C_p \|f\|_{L^p} \quad (\forall f \in L^p(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})).$$

En appliquant cela à nos fonctions $(f_n)_{n=1}^\infty$:

$$\|T(f_n)\|_{L^p} \leq C_p \|f_n\|_{L^p} \quad (\forall n \geq 1),$$

grâce à l'équivalent que nous venons d'obtenir :

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{p}{p-1} (\log n)^{\frac{1}{p}} \leq C_p (\log n)^{\frac{1}{p}},$$

nous concluons que :

$$\frac{p}{p-1} \leq C_p.$$

(m) Le cas $p = \infty$ devrait donner à la limite, puisque $\frac{p}{p-1} \rightarrow 1$ quand $p \rightarrow \infty$:

$$\|T(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty},$$

et ceci est effectivement vrai, puisque pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} |T(f)(x)| &= \frac{1}{x} \left| \int_0^x f(t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{x} x \|f\|_{L^\infty]0,x[} \\ &\leq \|f\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Exercice 5. (a) Soit donc $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables positives intégrables $f_n: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ convergeant ponctuellement presque partout vers une certaine fonction-limite intégrable :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d),$$

elle aussi positive qui satisfait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx.$$

Soit aussi la suite auxiliaire :

$$g_n := \min(f_n, f) \quad (n \geq 1),$$

d'où :

$$0 \leq g_n \leq f_n \quad \text{et} \quad 0 \leq g_n \leq f.$$

Nous affirmons que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \min(f_n(x), f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned} \quad (\text{pour presque tout } x \in \mathbb{R}^d);$$

en effet, l'hypothèse que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N(\varepsilon) \gg 1$ tel que :

$$n \geq N(\varepsilon) \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

garantit aussi dans les deux cas possibles :

$$|g_n(x) - f(x)| = \begin{cases} |f(x) - f(x)| = 0 \leq \varepsilon, \\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \end{cases}$$

Ensuite, en utilisant :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} g_n = \lim_{n \rightarrow \infty} g_n = f,$$

l'inégalité de Fatou — qui s'applique car les $g_n \geq 0$ sont positives — donne :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx \\ \text{[Fatou]} \quad &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx \\ \text{[Trivial]} \quad &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx. \end{aligned}$$

Par ailleurs, une intégration de l'inégalité $g_n \leq f$ donne :

$$\int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx = \text{constante} < \infty,$$

d'où en prenant la limite supérieure :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx,$$

et ces deux inégalités mises bout à bout impliquent qu'on a partout égalité, ce qui offre le résultat demandé :

$$\liminf = \limsup = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx.$$

(b) Nous observons que :

$$|f_n - f| = f_n + f - 2 \min(f_n, f),$$

car lorsque $f_n \geq f$, on a bien :

$$f_n - f = f_n + f - 2f,$$

et quand $f_n \leq f$, on a bien aussi :

$$f - f_n = f_n + f - 2f_n.$$

Alors par intégration, le résultat **(a)** qui précède termine aisément :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)| dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx + \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx - 2 \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \\ &= 0! \end{aligned}$$

(c) Pour tout $n \geq 1$, la fonction :

$$h_n(x) := n^d \mathbf{1}_{]0, \frac{1}{n}[}(x) - n^d \mathbf{1}_{]-\frac{1}{n}, 0[}(x)$$

prend, en $x = 0$, visiblement la valeur $h_n(0) = 0$.

Soit maintenant $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ quelconque. Dès que l'une de ses coordonnées $x_i \neq 0$ non nulle satisfait :

$$|x_i| \geq \frac{1}{n} \quad (\exists 1 \leq i \leq d),$$

à savoir dès que :

$$n \geq \frac{1}{|x_i|},$$

on a $h_n(x) = 0$, ce qui montre la convergence simple :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d).$$

Ensuite, il est clair que :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} h_n(x) dx &= n^d m\left(\left]0, \frac{1}{n}\right[\right) - n^d m\left(\left] - \frac{1}{n}, 0\right[\right) \\ &= n^d \left(\frac{1}{n}\right)^d - n^d \left(\frac{1}{n}\right)^d \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'interprétation à conduire est de réaliser que sans l'hypothèse $h_n \geq 0$, le résultat de la Question (a) peut être mis en défaut.

(d) Soit un exposant $1 \leq p < \infty$. Pour $p = 1$:

$$\|h_n\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = n^d \left(\frac{1}{n}\right)^d + n^d \left(\frac{1}{n}\right)^d = 2 \quad (\forall n \geq 1),$$

et pour $1 < p < \infty$:

$$\begin{aligned} \left(\|h_n\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}\right)^p &= (n^d)^p \left(\frac{1}{n}\right)^d + (n^d)^p \left(\frac{1}{n}\right)^d \\ &= 2 n^{d(p-1)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty. \end{aligned}$$

En conclusion, on n'a donc jamais convergence vers 0 dans $L^p(\mathbb{R}^d)$ de la suite $(h_n)_{n=1}^\infty$.

Exercice 6. (a) D'après un théorème du cours, $\mathcal{C}_c^0(\left]0, 1\right[)$ est dense dans $L^2(\left]0, 1\right[)$ pour la norme $\|\cdot\|_{L^2}$, et il en va de même pour $\mathcal{C}_c^1(\left]0, 1\right[)$ — en fait, le cours a traité cela, et même établi la densité de \mathcal{C}_c^∞ dans tous les L^p avec $1 \leq p < \infty$.

Lorsque $f \in \mathcal{C}_c^1$, une simple intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx &= \left[f(x) \varphi(x) \right]_0^1 - \int_0^1 f'(x) \varphi(x) dx \\ [f(0) = \varphi(0) = f(1) = \varphi(1) = 0] \quad &= 0 - 0 - \int_0^1 \underbrace{f'(x)}_{=: \Lambda_f(x)} \varphi(x) dx \end{aligned}$$

montre qu'on peut prendre la dérivée (continue) de f comme fonction associée Λ_f , donc $\mathcal{C}_c^1 \subset \mathcal{S}$, et ainsi, \mathcal{S} est *a fortiori* dense dans L^2 .

(b) Établissons tout d'abord que la correspondance :

$$f \longmapsto \Lambda_f \quad (f \in \mathcal{S})$$

est linéaire.

En fait, lorsqu'elle existe, *i.e.* lorsque $f \in \mathcal{S}$, la fonction Λ_f satisfaisant :

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \Lambda_f(x) \varphi(x) dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1),$$

est unique, car si Λ_f^\sim est une autre telle fonction, après soustraction évidente, on obtient les annulations :

$$0 = - \int_0^1 \left(\Lambda_f^\sim(x) - \Lambda_f(x) \right) \varphi(x) dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1),$$

et par densité de \mathcal{C}_c^1 dans L^2 , on déduit pour toute $g \in L^2$ que :

$$0 = \int_0^1 \left(\Lambda_f^\sim(x) - \Lambda_f(x) \right) g(x) dx,$$

d'où $\Lambda_f^\sim = \Lambda_f$ en choisissant $g := \Lambda_f^\sim - \Lambda_f$ pour trouver l'annulation d'une norme L^2 qui implique l'annulation (presque partout) de la fonction.

Grâce à cette unicité, et grâce à la linéarité des intégrales qui définissent Λ_f , on vérifie maintenant aisément que :

$$f_1 + f_2 \longmapsto \Lambda_{f_1} + \Lambda_{f_2} \quad \text{et que :} \quad \mu f \longmapsto \mu \Lambda_f.$$

Une fois acquise cette linéarité de $f \longmapsto \Lambda_f$, des raisonnements élémentaires standard vus en cours montrent la bilinéarité :

$$\langle f, g \rangle_{\mathcal{S}} := \int_0^1 f(x) g(x) dx + \int_0^1 \Lambda_f(x) \Lambda_g(x) dx.$$

Enfin, pour conclure, on a bien positivité :

$$\langle f, f \rangle_{\mathcal{S}} = \int_0^1 f(x)^2 dx + \int_0^1 \Lambda_f(x)^2 dx \geq 0,$$

et annulation $0 = \langle f, f \rangle_{\mathcal{S}}$ si et seulement si $f(x) = 0$ presque partout, d'ailleurs seulement grâce à $0 = \int_0^1 f^2$.

(c) Pour établir la complétude de $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}})$, soit donc $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de Cauchy :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \gg 1 \quad (n_1, n_2 \geq N(\varepsilon) \implies \|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{\mathcal{S}} \leq \varepsilon),$$

à savoir :

$$\int_0^1 (f_{n_1}(x) - f_{n_2}(x))^2 dx + \int_0^1 (\Lambda_{f_{n_1}}(x) - \Lambda_{f_{n_2}}(x))^2 dx \leq \varepsilon^2.$$

Or ceci implique manifestement la « *cauchycité* » dans L^2 :

$$\|f_{n_1} - f_{n_2}\|_{L^2} \leq \varepsilon,$$

et comme L^2 est complet, il existe une limite $f \in L^2$:

$$\|f - f_n\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

De même, la suite $(\Lambda_{f_n})_{n=1}^\infty$ de L^2 étant tout aussi de Cauchy grâce à la même inégalité, comme L^2 est complet, il existe une limite $g \in L^2$:

$$\|g - \Lambda_{f_n}\|_{L^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Il reste encore à démontrer que $g = \Lambda_f$.

À cette fin, en revenant aux identités intégrales qui définissent les Λ_{f_n} :

$$\int_0^1 f_n(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 \Lambda_{f_n}(x) \varphi(x) dx \quad (\forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1),$$

l'inégalité de Cauchy-Schwarz garantit que le membre de gauche et le membre de droite tendent respectivement vers :

$$\int_0^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_0^1 g(x) \varphi(x) dx,$$

ce qui montre que $f \in \mathcal{S}$, avec $\Lambda_f = g$.

Exercice 7. Pour vérifier l'orthonormalité, étant donné deux couples (i, i') et (j, j') d'indices entiers ≥ 1 , le théorème de Fubini-Tonelli permet de décomposer l'intégrale :

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(x)\psi_j(y), \varphi_{i'}(x)\psi_{j'}(y) \rangle_{L^2(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})} &= \int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} \varphi_i(x)\psi_j(y) \overline{\varphi_{i'}(x)\psi_{j'}(y)} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \varphi_i(x) \overline{\varphi_{i'}(x)} dx \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y) \overline{\psi_{j'}(y)} dy \\ &= \delta_{i'}^i \delta_{j'}^j \\ &= \delta_{i',j'}^{i,j}. \end{aligned}$$

Ensuite, pour vérifier la complétude, il s'agit de montrer que toute fonction :

$$h(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2})$$

qui est orthogonale à toutes les $\varphi_i(x)\psi_j(y)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}} \varphi_i(x)\psi_j(y) \overline{h(x, y)} dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \varphi_i(x) \underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y) \overline{h(x, y)} dy}_{=: \overline{g(x)}} dy \quad (\forall i, \forall j), \end{aligned}$$

est nécessairement nulle (presque partout). Mais alors, la fonction (mesurable) $g(x)$ qui apparaît ci-dessus est orthogonale à toutes les φ_i , donc par totalité de la base hilbertienne $(\varphi_i(x))_{i=1}^\infty$ de $L^2(\mathbb{R}^{d_1})$, il vient, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^{d_1}$:

$$0 = \overline{g(x)} = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \psi_j(y) \overline{h(x, y)} dy \quad (\forall j),$$

et à nouveau de manière similaire par totalité de la base hilbertienne $(\psi_j(y))_{j=1}^\infty$ de $L^2(\mathbb{R}^{d_2})$, il vient :

$$h(x, y) = 0 \quad (\text{presque partout}).$$

5. Examen 3

Exercice 1. [Convergence en mesure] On dit qu'une suite $(f_n)_{n=1}^\infty$ de fonction $f_n: E \rightarrow \mathbb{C}$ de fonctions mesurables définies sur un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ converge en mesure vers une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{C}$ si, pour tout $\delta > 0$, on a :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} m(\{x \in E: |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}).$$

(a) Lorsque f_n converge en norme L^1 vers une fonction $f \in L^1(E, \mathbb{C})$, montrer que f_n converge en mesure vers f , et généraliser ensuite cela aux espaces L^p avec $1 \leq p < \infty$.

(b) Avec l'hypothèse supplémentaire que $m(E) < \infty$, montrer que si $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge presque partout vers une fonction f , alors $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge aussi en mesure vers f .

(c) En considérant la suite de fonctions sur \mathbb{R}_+ :

$$g_n(x) := \frac{x}{n} \mathbf{1}_{[0, n^2]}(x) \quad (n \geq 1),$$

montrer que l'hypothèse $m(E) < \infty$ dans (b) est en général nécessaire.

Exercice 2. Soit $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable intégrable satisfaisant $\int_{\mathbb{R}^d} f \in]0, \infty[$. Soit $\alpha > 0$ un paramètre. On introduit la suite numérique $(a_n)_{n=1}^\infty$ définie par :

$$a_n := \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx,$$

avec $a_n \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$.

(a) Montrer que $m(\{x \in \mathbb{R}^d: f(x) \neq 0\}) > 0$, où m désigne la mesure de Borel-Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

(b) Lorsque $0 < \alpha < 1$, montrer que $\infty = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Indication: Utiliser le théorème de Fatou après en avoir soigneusement rappelé l'énoncé exact.

(c) Lorsque $\alpha = 1$, montrer que $\int f = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

(d) Lorsque $\alpha > 1$, montrer que $0 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$. Indication: Montrer que la fonction $y \mapsto \frac{\log(1+y^\alpha)}{y}$ est bornée sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 3. Soit $(f_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables sur $[0, 1] \subset \mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K(\varepsilon) \gg 1 \quad \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K(\varepsilon)\}} \leq \varepsilon \quad (\forall n \geq 1).$$

(a) Pour une constante réelle fixée $K > 0$, montrer que :

$$0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 \left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| \leq K\}} \right).$$

(b) Montrer, pour tout entier $p \geq 1$, que :

$$\int_0^1 \left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}} \leq \sum_{1 \leq n \leq p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K\}}.$$

$$\int_0^1 \left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}} \leq \sum_{1 \leq n \leq p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K\}},$$

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe une grande constante réelle $K(\varepsilon) \gg 1$ telle que :

$$\frac{1}{p} \int_0^1 \left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}} \leq \varepsilon \quad (\forall p \geq 1).$$

(d) Montrer que :

$$0 = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n| \right).$$

Exercice 4. Pour $y \in \mathbb{R}$, on introduit :

$$I(y) := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dx.$$

(a) Calculer $I(y)$ et montrer que $y \mapsto I(y)$ est une fonction continue bornée.

(b) Soit $(y_k)_{k=1}^\infty$ une suite de nombres réels. Pour $x \in [0, 1]$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit :

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}.$$

Montrer que la suite numérique $(\int_0^1 g_n(x) dx)_{n=1}^\infty$ est bornée.

(c) Montrer que la suite de fonctions $(g_n)_{n=1}^\infty$ converge simplement vers une certaine fonction g_∞ mesurable et intégrable sur $[0, 1]$.

(d) Montrer que la série de fonctions de $[0, 1]$ à valeurs dans $[0, \infty]$:

$$x \mapsto \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}}$$

converge presque partout vers une fonction finie.

(e) Montrer que si $(y_n)_{n=1}^\infty$ est une suite à valeurs dans $[0, 1]$ qui est dense dans $[0, 1]$, alors la fonction g_∞ est discontinue en presque tout point.

(f) Montrer que si $(y_n)_{n=1}^\infty$ est à valeurs dans $[2, \infty]$, alors la fonction g_∞ est indéfiniment dérivable sur $[0, 1]$.

Exercice 5. [Lemme d'Austin] Un ensemble qui est réunion $I_1 \cup \dots \cup I_n$ d'intervalles ouverts non vides $I_i \subset \mathbb{R}$ est toujours de mesure :

$$m(I_1 \cup \dots \cup I_n) \leq m(I_1) + \dots + m(I_n).$$

Montrer qu'il existe une sous-famille d'intervalles deux à deux *disjoints* I_{i_1}, \dots, I_{i_k} pour certains indices appropriés $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ tels que :

$$m(I_{i_1}) + \dots + m(I_{i_k}) = m(I_{i_1} \cup \dots \cup I_{i_k}) \geq \frac{1}{3} m(I_1 \cup \dots \cup I_n).$$

6. Corrigé de l'examen 3

Exercice 1. (a) Soit donc $\delta > 0$ fixé. On travaille directement dans L^p avec $1 \leq p < \infty$. Si on abrège, pour $n \geq 1$:

$$E_{n,\delta} := \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\},$$

il vient :

$$\delta^p \mathbf{1}_{E_{n,\delta}}(x) \leq |(f_n - f)(x)|^p \quad (\forall x \in E),$$

ce qui, après intégration, donne :

$$\begin{aligned} \delta^p m(E_{n,\delta}) &\leq \int_E |f_n(x) - f(x)|^p dx \\ &\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0, \end{aligned}$$

et comme on peut diviser par la constante non nulle $\delta^p > 0$, on obtient bien :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} m(E_{n,\delta}) = 0.$$

(b) Pour tout $\delta > 0$ fixé, le but, sur $E \subset \mathbb{R}$ de mesure finie, si $(f_n)_{n=1}^\infty$ converge simplement presque partout vers une certaine fonction mesurable f , est d'atteindre :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} m(E_{n,\delta}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\{x \in E : |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\}),$$

autrement dit, d'établir que :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \gg 1 \quad (n \geq N(\varepsilon) \implies m(E_{n,\delta}) \leq \varepsilon).$$

À cette fin, pour $N \geq 1$ entier, introduisons les ensembles :

$$G_N := \{x \in E : |f_n(x) - f(x)| < \delta, \forall n \geq N\},$$

qui sont emboîtés (exercice mental) :

$$G_N \subset G_{N+1} \quad (\forall N \geq 1),$$

et qui remplissent :

$$E = \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N,$$

parce que (exercice mental avec solution), en tout point $x \in E$, l'hypothèse de convergence simple s'écrit :

$$\exists N(x, \delta) \gg 1 \quad (n \geq N(x, \delta) \implies |f_n(x) - f(x)| < \delta \quad \forall n \geq N(x, \delta)).$$

Les complémentaires :

$$\begin{aligned} F_N &:= \{x \in E : \exists n \geq N, |f_n(x) - f(x)| \geq \delta\} \\ &= \bigcup_{n \geq N} E_{n,\delta} \end{aligned}$$

sont alors décroissants :

$$F_N = E \setminus G_N \subset E \setminus G_{N+1} = F_{N+1} \quad (\forall N \geq 1),$$

et comme :

$$\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N = E \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} G_N = \emptyset,$$

en tenant compte de l'hypothèse qu'ils sont tous contenus dans l'ensemble E de mesure finie, un théorème du cours donne :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} m(F_N) = m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty} F_N\right) = 0,$$

donc pour tout $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il existe un entier $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que :

$$m(F_{N(\varepsilon)}) \leq \varepsilon.$$

Alors la conclusion s'offre à nous, car maintenant, pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, on a :

$$\begin{aligned} m(E_{n,\delta}) &= m\left(\bigcup_{n \geq N(\varepsilon)} E_{n,\delta}\right) \\ &= m(F_{N(\varepsilon)}) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

(c) Sur $E = \mathbb{R}_+$, ensemble de mesure infinie, la suite de fonctions positives :

$$g_n(x) := \frac{x}{n} \cdot \mathbf{1}_{[0, n^2]}(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+, n \geq 1),$$

est manifestement encadrée par :

$$0 \leq g_n(x) \leq \frac{x}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0,$$

ce qui montre la convergence simple vers la fonction nulle $g := 0$.

Toutefois, elle ne converge pas en mesure vers la fonction $g = 0$, car si $\delta > 0$ est fixé :

$$\begin{aligned} m(\{x \in \mathbb{R}_+ : g_n(x) \geq \delta\}) &= m(\{0 \leq x \leq n^2 : \frac{x}{n} \geq \delta\}) \\ &= m(\{\delta n \leq x \leq n^2\}) \\ &= n(n - \delta) \end{aligned}$$

ne tend pas vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ — et même bien pire, diverge vers l'infini !

Exercice 2. (a) Si on avait au contraire :

$$0 = m(\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}),$$

on aurait $0 = \int_{\mathbb{R}^d} f$, en contradiction avec l'hypothèse $\int_{\mathbb{R}^d} f \in]0, \infty[$.

(b) Tout d'abord, le théorème de Fatou énonce que si une suite $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables $f_n : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ ne prend que des valeurs positives — hypothèse importante —, alors :

$$\int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx.$$

Ici, comme la mesure de $\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) > 0\}$ est strictement positive, il existe $\delta > 0$ tel que l'ensemble :

$$E_\delta := \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq \delta\}$$

est de mesure strictement positive :

$$m(E_\delta) > 0,$$

car $m(\{f > 0\}) > 0$ et car $\{f > 0\} = \cup_{n=1}^{\infty} \{f > \frac{1}{n}\}$.

Maintenant, supposons que l'exposant α dans :

$$\begin{aligned} a_n &:= \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx \\ &\geq \int_{E_\delta} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx, \end{aligned}$$

satisfait $0 < \alpha < 1$. Comme $\log(1+x) \sim x$ pour x proche de 0, et comme $n \left(\frac{\delta}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$, il vient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left[1 + \left(\frac{\delta}{n} \right)^\alpha \right] = \infty,$$

et nous pouvons donc minorer :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E_\delta} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx \\ \text{[Fatou !]} &\geq \int_{E_\delta} \liminf_{n \rightarrow \infty} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx \\ &\geq \int_{E_\delta} \lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left[1 + \left(\frac{\delta}{n} \right)^\alpha \right] dx \\ &= m(E_\delta) \cdot \infty \\ &= \infty. \end{aligned}$$

(c) Lorsque $\alpha = 1$, l'inégalité classique $\log(1+y) \leq y$ valable pour tout $y \geq 0$ — en fait pour tout $y > -1$, mais notre $y := f(x)$ est ici ≥ 0 — donne :

$$n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n} \right] \leq f(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}^d),$$

d'où par intégration :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n} \right] dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \quad (\forall n \geq 1),$$

ce qui montre en particulier que tous ces $a_n < \infty$ sont finis.

Pour l'inégalité inverse, c'est encore et à nouveau Fatou qui nous appelons à la rescousse :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{E_\delta} n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n} \right] dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow \infty} n \log \left[1 + \frac{f(x)}{n} \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx, \end{aligned}$$

cette dernière limite inférieure étant une vraie limite.

(d) Supposons enfin que $\alpha > 1$, et commençons par vérifier, comme cela a été suggéré, que la fonction :

$$y \mapsto \frac{\log(1 + y^\alpha)}{y}$$

est bornée sur \mathbb{R}_+ .

En effet, elle est \mathcal{C}^∞ — donc \mathcal{C}^0 — sur $]0, \infty[$, et quand $y \xrightarrow{>} 0$, l'équivalent $\log(1 + y) \sim y$ donne le prolongement par continuité :

$$\frac{\log(1 + y^\alpha)}{y} \underset{y \rightarrow 0}{\sim} y^{\alpha-1} \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0,$$

tandis que, lorsque $y \rightarrow \infty$:

$$\frac{\log(1 + y^\alpha)}{y} \underset{y \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\alpha \log y}{y} \xrightarrow{y \rightarrow \infty} 0.$$

Par conséquent, il existe une constante $0 < C_\alpha < \infty$ telle que :

$$(0 \leq) \quad \log(1 + y^\alpha) \leq C_\alpha y \quad (\forall y \in]0, \infty[).$$

Ici appliquée à $y := \frac{f(x)}{n}$, cette inégalité montre que les intégrandes des a_n sont uniformément dominées par une fonction-majorante :

$$n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] \leq n C_\alpha \frac{f(x)}{n} = C_\alpha f(x),$$

qui est intégrable sur \mathbb{R}^d , puisque f avait été supposée l'être, ce qui permet premièrement de constater agréablement la finitude de tous ces :

$$a_n = \int_{\mathbb{R}^d} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] dx \leq C_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx < \infty,$$

et deuxièmement, en appliquant le théorème de convergence dominée, après avoir furtivement observé l'annulation des limites ponctuelles en tout $x \in \mathbb{R}^d$ fixé :

$$(0 \leq) \quad n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] \leq \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha = \frac{1}{n^{\alpha-1}} (f(x))^\alpha \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0,$$

de conclure que :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} n \log \left[1 + \left(\frac{f(x)}{n} \right)^\alpha \right] \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} 0 = 0. \end{aligned}$$

Exercice 3. (a) Pour toute constante réelle fixée $0 < K < \infty$, et tout entier $p \geq 1$, on a clairement :

$$\sup_{n \leq p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| \leq K\}} \leq K \quad (\forall x \in [0, 1]),$$

d'où après intégration la majoration permettant de déterminer la limite demandée :

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| \leq K\}}(x) dx \right) &\leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} K \int_0^1 dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

(b) Fixons un point $x \in [0, 1]$, et choisissons un entier $m = m(x)$ avec $1 \leq m \leq p$ réalisant :

$$|f_m(x)| = \sup_{1 \leq n \leq p} |f_n(x)|,$$

d'où :

$$|f_n(x)| \leq |f_m(x)| \quad (\forall 1 \leq n \leq p),$$

puis :

$$|f_n(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}}(x) \leq |f_m(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}}(x) \quad (\forall 1 \leq n \leq p).$$

Lorsque $|f_m(x)| \leq K$, le membre de droite vaut 0, il est donc inférieur à toute quantité positive.

Lorsque $|f_m(x)| > K$, on poursuit la majoration du membre de droite :

$$\begin{aligned} |f_n(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}}(x) &\leq |f_m(x)| \cdot 1 \\ &= |f_m(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_m| > K\}}(x) \\ &\leq \sum_{1 \leq n \leq p} |f_n(x)| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K\}}(x), \end{aligned}$$

puis en prenant le supremum sur $1 \leq n \leq p$ à gauche :

$$\left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}} \leq \sum_{1 \leq n \leq p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K\}},$$

pour conclure par une simple intégration :

$$\int_0^1 \left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K\}} \leq \sum_{1 \leq n \leq p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K\}},$$

(c) Soient donc $\varepsilon > 0$ et $K(\varepsilon) \gg 1$ comme dans l'hypothèse de cet exercice. Alors grâce à ce qui précède, que l'on divise par p :

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^1 \left(\sup_{n \leq p} |f_n| \right) \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K(\varepsilon)\}} &\leq \frac{1}{p} \sum_{1 \leq n \leq p} \int_0^1 |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{|f_n| > K(\varepsilon)\}} \\ &\leq \sum_{1 \leq n \leq p} \varepsilon \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

(d) Il ne reste plus qu'à effectuer la synthèse de ce qui vient d'être vu. L'intégrale dont il faut déterminer la limite quand $p \rightarrow \infty$ se découpe naturellement en deux morceaux, toujours avec $K = K(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n| &= \frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| \leq K(\varepsilon)\}} + \frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| > K(\varepsilon)\}} \\ \text{[Questions (a) et (c)]} &\leq \underbrace{\frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n| \cdot \mathbf{1}_{\{\sup_{n \leq p} |f_n| \leq K(\varepsilon)\}}}_{\xrightarrow{p \rightarrow \infty}} + \varepsilon \end{aligned}$$

et donc, il existe $N(\varepsilon) \gg 1$ assez grand pour que, pour tout $n \geq N(\varepsilon)$, on ait :

$$(0 \leq) \quad \frac{1}{p} \int_0^1 \sup_{n \leq p} |f_n| \leq \varepsilon + \varepsilon,$$

ce qui établit bien la « zéro-ité » annoncée de la limite.

Exercice 4. (a) Trois cas sont naturellement à distinguer.

- Lorsque $y \leq 0$:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx = \left[2\sqrt{x-y} \right]_0^1 = 2\sqrt{1-y} - 2\sqrt{-y}.$$

- Lorsque $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned} I(y) &= \int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-x}} dx + \int_y^1 \frac{1}{\sqrt{x-y}} dx \\ &= \left[-2\sqrt{y-x} \right]_0^y + \left[2\sqrt{x-y} \right]_y^1 \\ &= 2\sqrt{y} + 2\sqrt{1-y}. \end{aligned}$$

- Lorsque $1 \leq y$:

$$I(y) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y-x}} dx = \left[-2\sqrt{y-x} \right]_0^1 = 2\sqrt{y} - 2\sqrt{y-1}.$$

Sur $] -\infty, 0[\cup]0, 1[\cup]1, \infty[$, la continuité de $y \mapsto I(y)$ est claire, tandis qu'au premier point spécial 0 :

$$\lim_{y \underset{<}{\rightarrow} 0} I(y) = 2\sqrt{1-0} - \sqrt{-0} = 2\sqrt{0} + 2\sqrt{1-0} = \lim_{0 \underset{<}{\leftarrow} y} I(y),$$

et au point spécial 1 :

$$\lim_{y \underset{>}{\rightarrow} 1} I(y) = 2\sqrt{1} + 2\sqrt{1-1} = 2\sqrt{1} - 2\sqrt{1-1} = \lim_{1 \underset{<}{\leftarrow} y} I(y).$$

Ainsi, $y \mapsto I(y)$ est continue sur \mathbb{R} tout entier, donc bornée sur tout compact de \mathbb{R} . Mais comme, en utilisant $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$, on a :

$$\lim_{-\infty \leftarrow y} I(y) = \lim_{-\infty \leftarrow y} 2 \frac{1}{\sqrt{1-y} + \sqrt{-y}} = 0,$$

ainsi que :

$$\lim_{y \rightarrow \infty} I(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} 2 \frac{1}{\sqrt{y} + \sqrt{y-1}} = 0,$$

cette fonction $I(\cdot)$ est en fait bornée sur \mathbb{R} tout entier.

(b) Ainsi donc, puisque :

$$\|I\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} = \sup_{y \in \mathbb{R}} |I(y)| < \infty,$$

il devient aisé de majorer uniformément en $n \geq 1$ les intégrales sur $[0, 1]$ des fonctions proposées :

$$g_n(x) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \frac{1}{\sqrt{|x-y_k|}} \quad (n \geq 1),$$

où $(y_k)_{k=1}^\infty$ est une suite quelconque de nombres réels, car en effet :

$$\begin{aligned}
 (0 \leq) \quad \int_0^1 g_n(x) dx &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{|x - y_k|}} dx \\
 &\leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} I(y_k) \\
 &\leq \|I\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \\
 &\leq \|I\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \frac{\pi^2}{6},
 \end{aligned}$$

en se souvenant que $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2}$ converge et vaut d'ailleurs $\frac{\pi^2}{6}$, comme nous l'a appris Euler.

(c) Tout d'abord, en tout point fixé $x \in [0, 1]$, la limite ponctuelle :

$$g_\infty(x) := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)$$

existe toujours dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, car les valeurs $g_n(x) \leq g_{n+1}(x)$ croissent, et la fonction-limite g_∞ est mesurable, grâce à théorème fondamental du cours.

De plus, comme $0 \leq g_n \leq g_{n+1}$ partout sur $[0, 1]$, pour tout $n \geq 1$, le théorème de convergence monotone s'applique et donne :

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 g_\infty(x) dx &= \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 g_n(x) dx \\
 &\leq \|I\|_{\mathcal{C}^0(\mathbb{R})} \frac{\pi^2}{6} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

inégalité fort agréable qui établit l'intégrabilité sur $[0, 1]$ de la fonction positive g_∞ .

(d) Observant que la fonction g_∞ à valeurs dans $\mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ est bien entendu donnée par :

$$g_\infty(x) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{|x - y_k|}},$$

la finitude ainsi acquise de $\int g_\infty$ garantit alors, d'après un lemme du cours bien connu car très souvent utilisé, que les valeurs $0 \leq g_\infty(x) < \infty$ sont finies en presque tout point $x \in [0, 1]$ — car sinon, si ces valeurs étaient infinies sur un ensemble de mesure strictement positive, on aurait $\int g_\infty = \infty$.

(e) D'après la Question (d), la fonction :

$$g_\infty(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{|x - y_n|}}$$

prend des valeurs finies en presque tout point $x \in [0, 1]$. Posons alors :

$$D := \{x \in [0, 1] : g_\infty(x) < \infty\},$$

et observons que $y_n \notin D$ car on a visiblement :

$$g_\infty(y_n) = \infty \quad (\forall n \geq 1).$$

Nous affirmons alors que :

$$D \subset \{x \in [0, 1] : g_\infty \text{ n'est pas continue en } x\},$$

ce qui montrera que g_∞ est discontinue presque partout. En effet, par densité de $(y_n)_{n=1}^\infty$ dans $[0, 1]$, tout point $x \in D$ est limite d'une certaine sous-suite $(y_{n_k})_{k=1}^\infty$:

$$y_{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} x.$$

Si g_∞ était continue en x , elle serait nécessairement bornée dans un petit voisinage ouvert non vide de x (exercice mental), contredisant le fait que :

$$g_\infty(y_{n_k}) = \infty \quad (\forall k \geq 1).$$

L'interprétation à retenir est qu'une fonction peut tout à fait être Lebesgue-intégrable, comme l'est g_∞ , tout en étant *discontinue* presque partout.

(f) On suppose pour terminer au contraire que tous les y_n , avec $n \geq 1$, sont dans $[2, \infty[$, d'où :

$$y_n - x \geq 2 - 1 \quad (\forall n \geq 1, \forall x \in [0, 1]),$$

et donc :

$$\frac{1}{\sqrt{y_n - x}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 - 1}} = 1,$$

ce qui montre que la série :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \frac{1}{\sqrt{y_n - x}} \Big|_{[0, 1]}$$

est normalement, donc uniformément, convergente sur $[0, 1]$, donc définit une fonction continue sur $[0, 1]$, d'après un théorème classique connu.

Ensuite généralement, pour tout entier $\kappa \geq 0$, la dérivée κ -ème de la fonction $x \mapsto (y_n - x)^{-1/2}$ vaut :

$$\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - 1\right) \cdots \left(-\frac{1}{2} - \kappa + 1\right) (y_n - x)^{-\frac{1}{2} - \kappa} = \frac{\text{constante}_\kappa}{(y_n - x)^{\kappa + \frac{1}{2}}},$$

et pour la même raison, on a les majorations uniformes par rapport à $x \in [0, 1]$:

$$\left| \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} [(y_n - x)^{-\frac{1}{2}}] \right| \leq \frac{|\text{constante}_\kappa|}{1^{\kappa + \frac{1}{2}}},$$

qui garantissent la convergence normale-uniforme de la série dérivée terme à terme :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\frac{1}{\sqrt{y_n - x}} \right)^{(\kappa)} \Big|_{[0, 1]} \quad (\kappa \geq 0),$$

donc grâce à un théorème connu, $g_\infty|_{[0, 1]}$ est de classe \mathcal{C}^κ pour tout $\kappa \geq 0$, donc est \mathcal{C}^∞ .

Exercice 5. Avec $n_1 := n$, on renote cette collection d'ouverts non vides :

$$I_1^1 \cup \cdots \cup I_{n_1}^1,$$

on sélectionne l'un d'entre eux $I_{i_1}^1$ de longueur maximale, on définit :

$$\widetilde{I}_{i_1}^1 := 3 I_{i_1}^1,$$

comme étant l'intervalle de même centre dilaté 3 fois, on supprime de la collection *tous* les I_j^1 avec $j \neq i_1$ qui *intersectent* $\widetilde{I}_{i_1}^1$, et on note, avec un certain entier $0 \leq n_2 \leq n_1 - 1$, la réunion des intervalles restants :

$$I_1^2 \cup \dots \cup I_{n_2}^2.$$

Comme on a inclusion de tous les intervalles dans la réunion maintenant *disjointe* :

$$I_1^1 \cup \dots \cup I_{n_1}^1 \subset \widetilde{I}_{i_1}^1 \coprod (I_1^2 \cup \dots \cup I_{n_2}^2),$$

il vient :

$$\begin{aligned} m(I_1^1 \cup \dots \cup I_{n_1}^1) &= m(\widetilde{I}_{i_1}^1) + m(I_1^2 \cup \dots \cup I_{n_2}^2) \\ &= 3m(I_{i_1}^1) + m(I_1^2 \cup \dots \cup I_{n_2}^2). \end{aligned}$$

Ensuite, on répète ce procédé avec la collection restante, il se termine en un nombre fini $k \leq n$ d'étapes, et on obtient bien une sous-famille disjointe satisfaisant :

$$m(I_1 \cup \dots \cup I_n) \leq 3(m(I_{i_1}) + \dots + m(I_{i_k})).$$

7. Examen 4

Exercice 1. [Convergence monotone en théorie de Riemann] Sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ avec $-\infty < a < b < \infty$, soit une suite de fonctions $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont toutes décroissantes sur $[a, b]$. On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) =: f(x)$ existe en tout point $x \in [a, b]$. L'objectif est d'établir que $\int_a^b f_n(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, l'intégrale étant prise ici au sens de Riemann.

(a) Montrer que f est décroissante.

(b) Justifier que les f_n ainsi que f sont toutes Riemann-intégrables.

(c) Au moyen d'une figure soignée, esthétique et intelligente, faire voir sans mots qu'en un point $x_0 \in]a, b[$, la suite numérique $(f_n(x_0))_{n=1}^{\infty}$ n'est pas forcément décroissante, ni même croissante.

(d) Justifier, pour tout $\varepsilon > 0$, l'existence d'une subdivision :

$$\Delta = \Delta_\varepsilon = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$$

de l'intervalle $[a, b]$ telle que les sommes de Darboux inférieure et supérieure $\Sigma_\Delta(f)$ et $\Sigma^\Delta(f)$, dont on rappellera soigneusement la définition, satisfont :

$$\Sigma^\Delta(f) - \varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx \leq \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(e) Montrer qu'il existe un entier $n = N_\varepsilon \gg 1$ assez grand pour que :

$$f(x_\kappa) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq f_n(x_\kappa) \leq f(x_\kappa) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (\forall n \geq N_\varepsilon, \forall \kappa = 1, \dots, \nu).$$

(f) Toujours pour $n \geq N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) \leq \Sigma^\Delta(f) + \varepsilon.$$

(g) Toujours et encore pour $n \geq N_\varepsilon$, montrer que :

$$\Sigma_\Delta(f_n) \geq \Sigma_\Delta(f) + \varepsilon.$$

(h) Montrer que :

$$\Sigma^\Delta(f_n) - 2\varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx \leq \Sigma_\Delta(f_n) + 2\varepsilon \quad (\forall n \geq N_\varepsilon),$$

(i) Montrer que :

$$\int_a^b f_n(x) dx - 2\varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b f_n(x) dx + 2\varepsilon \quad (\forall n \geq N_\varepsilon),$$

et conclure.

Exercice 2. [Borel-Cantelli] Soit une série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ de fonctions mesurables définies sur \mathbb{R}^d satisfaisant toutes $a_k \geq 0$ presque partout.

(a) Pour $n \geq 1$, soit $f_n(x) := \sum_{k=1}^n a_k(x)$. Vérifier que $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ presque partout.

(b) Justifier l'existence de $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$.

(c) Montrer que :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int a_k(x) dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) dx.$$

(d) Sous l'hypothèse supplémentaire que la valeur du membre de gauche est $< \infty$, montrer que la série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ converge presque partout vers une certaine fonction-limite mesurable finie.

(e) Soit maintenant une suite $(E_k)_{k=1}^{\infty}$ de sous-ensembles mesurables de \mathbb{R}^d satisfaisant $\sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) < \infty$. Montrer que l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^d$ qui appartiennent à une infinité de E_k est de mesure nulle.

Exercice 3. Pour $t > 0$, on pose :

$$k(t) := \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx.$$

(a) Montrer que k est une fonction \mathcal{C}^1 sur $]0, \infty[$.

(b) Montrer que $k'(t) = -\frac{1}{t^2+1}$.

(c) Calculer la limite de $k(t)$ lorsque $t \rightarrow \infty$.

(d) En déduire $k(t)$.

(e) Calculer la limite quand $t \rightarrow 0$ de $k(t)$.

(f) La fonction $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ est-elle intégrable sur $[0, \infty[$ pour la mesure de Lebesgue dx sur \mathbb{R} ?

Exercice 4. [Théorie de la mesure, Question de cours] Soit une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(a) Justifier brièvement qu'il existe une suite $(\varphi_k)_{k=1}^{\infty}$ de fonctions étagées positives $\varphi_k \geq 0$ qui tendent ponctuellement vers f en tout point, avec $\varphi_k \leq \varphi_{k+1}$.

(b) Montrer que :

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f - \varphi_k\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}.$$

(c) Soit un ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. Sans rappeler toute la démonstration mais en rappelant les idées, justifier soigneusement qu'il existe une famille finie de rectangle fermés presque disjoints R_1, \dots, R_J tels que :

$$m\left(E \Delta \bigcup_{j=1}^J R_j\right) \leq \varepsilon.$$

(d) Montrer que :

$$\left\| \mathbf{1}_E - \sum_{j=1}^J \mathbf{1}_{\text{Int } R_j} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon.$$

(e) Montrer que les fonctions en escalier sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(f) Montrer que les fonctions continues à support compact sont denses dans $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}_+)$.

(g) Comment étendre ces deux résultats à $L^1(\mathbb{R}^d, \mathbb{C})$?

Exercice 5. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un ouvert, et soient deux nombres réels $1 \leq p < q < \infty$.

(a) Pour $d = 1$, trouver un exemple d'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}$ de mesure $m(\Omega) = \infty$ infinie tel que $L^q(\Omega, \mathbb{C})$ n'est pas contenu dans $L^p(\Omega, \mathbb{C})$.

(b) Lorsque Ω est de mesure de Lebesgue finie, montrer au contraire que $L^q(\Omega, \mathbb{C}) \subset L^p(\Omega, \mathbb{C})$.

(c) Toujours sous l'hypothèse $m(\Omega) < \infty$, montrer que :

$$\sup \{ \|f\|_{L^p(\Omega)} : f \in L^q(\Omega, \mathbb{C}), \|f\|_{L^q(\Omega)} = 1 \} = (m(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}.$$

Indication: Appliquer l'inégalité de Hölder à $f = f \cdot 1$ avec un réel p_1 tel que $p p_1 = q$.

Exercice 6. [Subdivisions verticales L^p] Étant donné une fonction mesurable $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$, soit pour tout réel $\lambda \geq 0$ l'ensemble :

$$E_\lambda := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \lambda\}.$$

(a) Justifier la mesurabilité de ces E_λ .

(b) Montrer que l'application $\lambda \mapsto m(E_\lambda)$ est mesurable.

(c) Pour tout exposant réel p avec $1 \leq p < \infty$, montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} (f(x))^p dx = p \int_{[0, \infty[} \lambda^{p-1} m(E_\lambda) d\lambda.$$

8. Corrigé de l'examen 4

Exercice 1. Tous les éléments de cet exercice apparaissent déjà dans le cours.

Exercice 2. Il en va de même pour cet exercice, lui aussi conçu en vu de tester l'assimilation du cours.

Exercice 3. (a) Pour $t > 0$ et $x \geq 0$, posons :

$$f(t, x) := e^{-tx} \frac{\sin x}{x}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit. Comme $t \mapsto f(t, x)$ est \mathcal{C}^1 sur $]0, \infty[$, de dérivée $-e^{-tx} \sin x$ majorée sur $[\varepsilon, \infty[$ par la fonction dominatrice uniforme en t :

$$\begin{aligned} | -e^{-tx} \sin x | &\leq e^{-\varepsilon x} |\sin x| \\ &\leq e^{-\varepsilon x}, \end{aligned}$$

qui est intégrable sur $[0, \infty[$, le théorème de dérivation des intégrales à paramètre s'applique pour offrir le caractère \mathcal{C}^1 sur $[\varepsilon, \infty[$ de la fonction :

$$k(t) := \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx,$$

avec en sus une formule pour sa dérivée :

$$k'(t) = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin x dx.$$

Puisque $\varepsilon > 0$ était prédestiné — par les dieux tout-puissants de la morphogénétique grecque — à tendre vers 0, nous concluons bien que la fonction k est \mathcal{C}^1 sur $]0, \infty[$.

(b) Il suffit de calculer l'intégrale précédente, grâce à une primitivation évidente :

$$\begin{aligned} k'(t) &= -\operatorname{Im} \left(\int_0^\infty e^{-tx} e^{ix} dx \right) = -\operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{(i-t)x}}{i-t} \right]_0^\infty \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{1}{i-t} \right) \\ &= -\frac{1}{t^2 + 1}. \end{aligned}$$

(c) Pour tout $x > 0$ fixé, il est clair qu'on a la convergence ponctuelle :

$$f(t, x) = e^{-tx} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

De plus, en utilisant l'inégalité classique $|\sin x| \leq x$ valable pour $x \in [0, \infty[$, on a la majoration uniforme en $t \geq 1$:

$$|f(t, x)| = e^{-tx} \frac{|\sin x|}{x} \leq e^{-1 \cdot x} \cdot 1,$$

par la fonction dominatrice $x \mapsto e^{-x}$, intégrable sur $[0, \infty[$. Ainsi, le théorème de convergence dominée s'applique, pour offrir :

$$k(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0.$$

(d) On résout l'équation différentielle obtenue en (b) :

$$k'(t) = -\frac{1}{t^2 + 1},$$

par simple primitivation pour obtenir :

$$k(t) = -\arctan(t) + \text{constante},$$

la condition à l'infini de (c) déterminant cette constante :

$$k(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t \quad (t > 0).$$

(e) Il est alors clair que $k(t)$ se prolonge continûment en $t = 0$, avec la belle valeur :

$$k(0) = \frac{\pi}{2}.$$

(f) Ainsi, ce qui vient d'être acquis fournit la valeur de l'intégrale impropre au sens de Riemann :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin x}{x} dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M \frac{\sin x}{x} dx,$$

limite dont on peut indépendamment démontrer qu'elle existe, car :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x} dx$$

est une série alternée de terme général tendant vers 0 lorsque $n \rightarrow \infty$ (exercice), mais à proprement parler, $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ n'est pas intégrable au sens de Lebesgue sur $[0, \infty[$, car lorsqu'on prend les valeurs absolues :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x} dx \\ &\geq \sum_{n=0}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{(n+1)\pi} dx \\ &= \int_0^\pi \sin x dx \cdot \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{2}{\pi} \cdot \infty, \end{aligned}$$

on trouve un majorant qui vaut ∞ à cause de la divergence $\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ de la série harmonique.

Exercice 4. À nouveau et encore — mais c'est la dernière fois ! —, cet exercice, ce n'était que du cours !

Exercice 5. En dimension $d = 1$, prenons $\Omega := [1, \infty[$, satisfaisant comme suggéré $m(\Omega) = \infty$, et prenons un réel $0 < c < 1$ satisfaisant :

$$cp < 1 < cq,$$

ce qui est possible car $1 \leq p < q < \infty$ par hypothèse.

Alors grâce à la connaissance de $\int_1^\infty \frac{1}{x^e} dx = \infty$ pour $e \leq 1$ et de $\int_1^\infty \frac{1}{x^e} dx = \left[\frac{x^{-e+1}}{-e+1} \right]_1^\infty = \frac{1}{e-1}$ pour $e > 1$, on voit que :

$$x \mapsto \frac{1}{x^c}$$

n'appartient pas à $L^p(\Omega)$, mais appartient à $L^q(\Omega)$.

(b) Supposons donc maintenant l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de mesure (de Borel-Lebesgue) finie, toujours avec $1 \leq p < q < \infty$, et soit $f \in L^q(\Omega, \mathbb{C})$.

Pour montrer que l'on a aussi $f \in L^p(\Omega, \mathbb{C})$, l'astuce « intersidérale » à laquelle il fallait penser (y compris dans de nombreux autres contextes) consiste, afin d'atteindre $\int_\Omega |f|^p < \infty$, à appliquer l'inégalité de Hölder en faisant naître un deuxième facteur artificiel anodin, le 1 :

$$|f(x)|^p = |f(x)|^p \cdot 1,$$

tout en choisissant des exposants finement ajustés :

$$r := \frac{q}{p}, \quad \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1, \quad r' = \frac{r}{r-1} = \frac{q}{q-p},$$

ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \int_\Omega |f(x)|^p dx &= \int_\Omega |f(x)|^p \cdot 1 dx \\ \text{[Hölder]} &\leq \left(\int_\Omega (|f(x)|^p)^r dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \left(\int_\Omega 1^{r'} dx \right)^{\frac{1}{r'}} \\ \text{[pr = q]} &= \left(\int_\Omega |f(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{r}} \cdot \underbrace{\left(m(\Omega) \right)^{\frac{1}{r'}}}_{\text{fini!}}, \end{aligned}$$

d'où en faisant apparaître les vraies normes L^p et L^q :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq \left(\left(\|f\|_{L^q(\Omega)}^q \right)^{\frac{1}{r}} \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(m(\Omega)^{\frac{1}{r'}} \right)^{\frac{1}{p}}$$

à savoir — exercice d'arithmétique élémentaire — :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &\leq \left(m(\Omega) \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(\Omega)} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce majorant étant fini, puisqu'on a supposé $f \in L^q(\Omega)$.

En fait, cette inégalité montre mieux, elle fait même voir (exercice mental) que l'injection :

$$L^q(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$$

est continue, et que la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_{L^p}$ est plus fine que la topologie définie par la norme $\|\cdot\|_{L^q}$.

On peut aussi faire voir (mais cela n'était pas demandé) que cette inclusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ avec $m(\Omega) < \infty$ est toujours stricte, en s'inspirant, et en généralisant (exercice), le cas de la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{x^c},$$

sur $\Omega := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ en dimension $d = 1$, avec un réel $0 < c < 1$ satisfaisant :

$$c p < 1 < c q,$$

puisque $\int_0^1 \frac{dx}{x^e} = \infty$ pour $e \geq 1$, et puisque $\int_0^1 \frac{dx}{x^e} = \left[\frac{x^{-e+1}}{-e+1} \right]_0^1 = \frac{1}{1-e}$ pour $e < 1$.

On pouvait aussi montrer directement l'inclusion $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ lorsque $m(\Omega) < \infty$ en utilisant l'inégalité élémentaire (distinguer $|y| \leq 1$ et $|y| \geq 1$) :

$$|y|^p \leq 1 + |y|^q \quad (\forall y \in \mathbb{R}, 1 \leq p < q < \infty),$$

d'où avec $y := f(x)$ et par intégration :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f(x)|^p dx &\leq m(\Omega) + \int_{\Omega} |f(x)|^q dx \\ &< \infty. \end{aligned}$$

(c) Toutefois, c'était la première approche avec l'inégalité de Hölder qui était la plus adéquate, car dans l'inégalité générale obtenue à l'instant :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq (m(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \|f\|_{L^q(\Omega)},$$

nous affirmons que la constante $(m(\Omega))^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$ s'avère être optimale, *i.e.* être la plus petite constante $0 < C < \infty$ satisfaisant :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{L^q(\Omega)} \quad (\forall f \in L^q(\Omega)),$$

comme on s'en convainc en réalisant qu'avec le choix « bête » de la fonction constante :

$$f := m(\Omega)^{-\frac{1}{q}},$$

on a en fait *égalité* dans l'inégalité :

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} \left(m(\Omega)^{-\frac{1}{q}} \right)^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &= \left(m(\Omega) \cdot m(\Omega)^{-\frac{p}{q}} \right)^{\frac{1}{p}} = m(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot 1 \\ &= m(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \left(m(\Omega) \cdot m(\Omega)^{-\frac{q}{q}} \right)^{\frac{1}{q}} \\ &= m(\Omega)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \cdot \left(\int_{\Omega} \left(m(\Omega)^{-\frac{1}{q}} \right)^q dx \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Exercice 6. (a) Comme $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ est mesurable, pour tout réel $\lambda > 0$, l'ensemble de surniveau :

$$E_{\lambda} := \{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \lambda\}$$

est par définition mesurable.

(b) Un résultat du cours, obtenu dans le chapitre « Fubini-Tonelli », a fait voir qu'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ comme celle-ci est mesurable si et seulement si son hypographe :

$$E := \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : 0 \leq \lambda \leq f(x)\}$$

est un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$.

Le théorème de Tonelli, appliqué à la fonction :

$$(x, \lambda) \mapsto \mathbf{1}_E(x, \lambda),$$

nous assure alors que l'application $\mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$:

$$\lambda \mapsto \int_{E_\lambda} 1 \cdot dx = m(E_\lambda),$$

est mesurable, puisque $\lambda \rightarrow m(E_\lambda)$ est l'intégrale par rapport à la première variable x de la fonction $(x, \lambda) \mapsto \mathbf{1}_E(x, \lambda)$.

(c) Pour terminer, avec un exposant réel $1 \leq p < \infty$, appliquons enfin le théorème de Tonelli à la fonction mesurable ≥ 0 :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

$$(x, \lambda) \mapsto p \lambda^{p-1} \mathbf{1}_E(x, \lambda),$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} m(E_\lambda) d\lambda &= \int_0^\infty p \lambda^{p-1} \left(\int_{E_\lambda} 1 dx \right) d\lambda = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+} p \lambda^{p-1} \mathbf{1}_E(x, \lambda) dx d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^\infty p \lambda^{p-1} \mathbf{1}_E(x, \lambda) d\lambda \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_0^{f(x)} p \lambda^{p-1} d\lambda \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} (f(x))^p dx, \end{aligned}$$

comme demandé.

9. Examen 5

Exercice 1. Sur un sous-ensemble quelconque $E \subset \mathbb{R}$, si une fonction quelconque $g: E \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée, on rappelle qu'il existe une suite minimisante $(y_\ell^-)_{\ell=1}^\infty$ et une suite maximisante $(y_\ell^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E g = \lim_{\ell \rightarrow \infty} g(y_\ell^-) \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} g(y_\ell^+) = \sup_E g.$$

On suppose donnée une suite de fonctions bornées $f_n: E \rightarrow \mathbb{R}$, $n \geq 1$, qui convergent uniformément vers une certaine fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N(\varepsilon) \quad \forall x \in E \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

(a) Montrer que f est elle aussi bornée.

(b) Si deux fonctions $h_1, h_2: E \rightarrow \mathbb{R}$ bornées satisfont :

$$h_1(x) \leq h_2(x) \quad (\forall x \in E),$$

montrer que :

$$\inf_E h_1 \leq \inf_E h_2 \quad \text{et} \quad \sup_E h_1 \leq \sup_E h_2.$$

(c) Montrer que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\left| \inf_E f_n - \inf_E f \right| \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad \left| \sup_E f_n - \sup_E f \right| \leq \varepsilon.$$

On travaille dorénavant sur un intervalle réel $E = [a, b]$ avec $-\infty < a < b < \infty$ et on ajuste $N(\varepsilon)$ pour que :

$$n \geq N(\varepsilon) \implies \left(\forall x \in [a, b] \quad |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \right).$$

Soit $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

(d) Si $\Delta = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{\nu-1} < x_\nu = b\}$ est une subdivision quelconque de $[a, b]$ avec $\nu \geq 1$, rappeler les deux définitions des sommes de Darboux inférieure $\Sigma_\Delta(g)$ et supérieure $\Sigma^\Delta(g)$ de g .

(e) Montrer que pour tout $n \geq N_\varepsilon$:

$$\Sigma_\Delta(f_n) - \varepsilon \leq \Sigma_\Delta(f) \leq \Sigma^\Delta(f) \leq \Sigma^\Delta(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Montrer que toute fonction qui est limite uniforme d'une suite de fonctions Riemann-intégrables est encore Riemann-intégrable.

(g) On appelle *fonction réglée* toute fonction qui est limite uniforme de fonctions en escalier. Établir que les fonctions réglées sont Riemann-intégrables.

Exercice 2. Dans l'espace euclidien réel standard \mathbb{R}^d de dimension $d \geq 1$, soit un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$. On rappelle qu'une fonction $f: E \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ à valeurs dans l'ensemble étendu des nombres réels est dite *mesurable* si tous ses ensembles de sous-niveau :

$$\{x \in E: f(x) < a\} \quad (\forall a \in \mathbb{R}),$$

sont mesurables.

(a) Montrer que $\{x \in E: f(x) \geq a\}$ est mesurable, pour tout $a \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\{f = -\infty\}$ et $\{f = +\infty\}$ sont mesurables.

(c) Montrer, pour tous réels $-\infty < a < b < +\infty$, que l'ensemble :

$$\{x \in E: a < f(x) < b\}$$

est mesurable.

(d) Lorsque $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est à valeurs finies, montrer que f est mesurable si et seulement si l'image inverse $f^{-1}(\mathcal{O})$ par f de tout sous-ensemble ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ est mesurable.

Exercice 3. [Questions d'assimilation du cours] Énoncer précisément sans démonstrations :

(a) le théorème de Tonelli, suivi du théorème de Fubini, en explicitant l'articulation logique naturelle qui existe entre eux lorsqu'on doit les appliquer dans des situations concrètes ;

(b) le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures ;

(c) le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue ;

(d) le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dépendant d'un paramètre, en supposant que la dépendance par rapport au paramètre est \mathcal{C}^1 .

Exercice 4. Soit dx la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction mesurable intégrable.

(a) Montrer que l'ensemble $\{x \in \mathbb{R}: |f(x)| = \infty\}$ est de mesure nulle.

(b) À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n f(x) dx.$$

(c) En produisant un contre-exemple, montrer que cette limite n'est pas toujours égale à 0 (voire n'existe pas toujours) lorsque la fonction mesurable f n'est pas supposée intégrable.

(d) Maintenant, soit $(h_n)_{n=1}^\infty$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur \mathbb{R} qui converge presque partout vers une certaine fonction $h := \lim_{n \rightarrow \infty} h_n$. Justifier que h est mesurable.

(e) On suppose de plus que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leq g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=1}^\infty$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ qui est *intégrable* sur \mathbb{R} . Après en avoir justifié l'utilisation, appliquer le Lemme de Fatou aux deux fonctions $g_n - h_n$ et $g_n + h_n$.

(f) Pour toute suite $(a_n)_{n=1}^\infty$ de nombres réels $a_n \in \mathbb{R}$, montrer que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

(g) Montrer l'implication :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx \right).$$

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur \mathbb{R} qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Établir l'équivalence :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \right) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right).$$

Indication: Pour l'implication « \iff », introduire $g_n := 2(|f_n| + |f|)$ ainsi que $h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|$.

Pour l'implication « \implies », utiliser l'inégalité $||a| - |b|| \leq |a - b|$ valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soit une fonction mesurable intégrable $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

(a) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni x \mapsto e^{-xt} f(x)$ est aussi mesurable intégrable sur \mathbb{R}_+ .

(b) On introduit alors la *transformée de Laplace* de f :

$$L_f(t) := \int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) dx \quad (t \in \mathbb{R}_+).$$

Montrer que la fonction $\mathbb{R}_+ \ni t \mapsto L_f(t) \in \mathbb{R}$ est finie et continue.

(c) Montrer que $0 = \lim_{t \rightarrow \infty} L_f(t)$.

(d) Calculer une expression explicite de $L_f(t)$ pour $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$.

(e) Faire de même pour $f(x) := \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}} \cdot \sin(x)$.

(f) Soient maintenant un nombre réel $T > 0$ et un entier $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

$$\int_0^{\infty} e^{-e^{n(T-x)}} f(x) dx = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} L_f(kn).$$

(g) Montrer que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-e^{n(T-x)}} f(x) dx = \int_T^{\infty} f(x) dx.$$

(h) Soit un nombre réel $a > 0$. Établir qu'il n'existe pas de fonction mesurable intégrable f sur \mathbb{R}_+ dont la transformée de Laplace vaut $L_f(t) = e^{-at}$ pour tout $t \geq 0$.

(i) Pour $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mesurable intégrable, montrer que $t \mapsto L_f(t)$ est \mathcal{C}^1 sur $]0, \infty[$.

(j) Quand $f \geq 0$ ne prend que des valeurs positives, montrer que :

$$\left(x \mapsto x f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0, \infty[\right) \iff \left(t \mapsto L_f(t) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \infty[\right).$$

10. Corrigé de l'examen 5

Exercice 1. (a) Faisons $\varepsilon := 1$, prenons $n := N(1)$, et, pour tout $x \in E$, par majoration triangulaire, déduisons le résultat voulu :

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leq |f(x) - f_{N(1)}(x) + f_{N(1)}(x)| \\ &\leq |f(x) - f_{N(1)}(x)| + |f_{N(1)}(x)| \\ &\leq 1 + \sup_E |f_{N(1)}| \\ &< \infty, \end{aligned}$$

car par hypothèse, $f_{N(1)}$ est bornée sur E !

(b) Clairement, de $h_1 \leq h_2$, on déduit pour tout $x \in E$ que :

$$\inf_E h_1 \leq h_1(x) \leq h_2(x) \leq \sup_E h_2,$$

d'où deux extraits intéressants pour la suite :

$$\inf_E h_1 \leq h_2(x) \quad \text{et} \quad h_1(x) \leq \sup_E h_2 \quad (\forall x \in E).$$

En prenant deux suites $(y_{2,\ell}^-)_{\ell=1}^\infty$ et $(y_{1,\ell}^+)_{\ell=1}^\infty$ qui réalisent :

$$\inf_E h_2 = \lim_{\ell \rightarrow \infty} h_2(y_{2,\ell}^-) \quad \text{et} \quad \lim_{\ell \rightarrow \infty} h_1(y_{1,\ell}^+) = \sup_E h_1,$$

il vient comme désiré :

$$\inf_E h_1 \leq \inf_E h_2 \quad \text{et} \quad \sup_E h_1 \leq \sup_E h_2.$$

(c) En appliquant le résultat de la question **(b)** qui précède aux deux inégalités :

$$f_n(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_n(x) + \varepsilon \quad (\forall x \in \mathbb{E}),$$

on obtient :

$$\begin{array}{l} \inf_E f_n - \varepsilon \leq \inf_E f, \\ \sup_E f_n - \varepsilon \leq \sup_E f, \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \inf_E f \leq \inf_E f_n + \varepsilon, \\ \sup_E f \leq \sup_E f_n + \varepsilon, \end{array}$$

d'où :

$$-\varepsilon \leq \inf_E f_n - \inf_E f \leq \varepsilon \quad \text{et} \quad -\varepsilon \leq \sup_E f_n - \sup_E f \leq \varepsilon,$$

et on reconstitue l'inégalité demandée en se souvenant que $-|\alpha| \leq \alpha \leq |\alpha|$ pour tout nombre $\alpha \in \mathbb{R}$.

(d) Pour qui n'a pas oublié son cours :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta}(g) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} g, \\ \Sigma^{\Delta}(g) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} g.\end{aligned}$$

(e) Grâce à la question (c) appliquée sur $E := [x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$, en tenant compte de la normalisation de l'épsilon, nous avons, pour tout $1 \leq \kappa \leq \nu$:

$$\inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f,$$

ainsi que :

$$\sup_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f \leq \sup_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Nous pouvons donc majorer :

$$\begin{aligned}\Sigma_{\Delta}(f_n) - \varepsilon &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n - \varepsilon \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \left[\inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n - \frac{\varepsilon}{b-a} \right] \\ &\leq \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \inf_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f \\ &= \Sigma_{\Delta}(f),\end{aligned}$$

ce qui est la première inégalité demandée.

La seconde inégalité $\Sigma_{\Delta}(f) \leq \Sigma^{\Delta}(f)$, abondamment vue en cours, est essentiellement évidente, donc pourrait être revue en instantané ici en notant que l'infimum de f sur chaque intervalle $[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]$ est bien entendu majoré par son supremum sur ce même segment.

Pour ce qui est de la troisième inégalité, on procède de manière similaire quoique légèrement différente :

$$\begin{aligned}\Sigma^{\Delta}(f) &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f \\ &\leq \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \left[\sup_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a} \right] \\ &= \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \sup_{[x_{\kappa-1}, x_{\kappa}]} f_n + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{\kappa=1}^{\nu} (x_{\kappa} - x_{\kappa-1}) \\ &= \Sigma^{\Delta}(f_n) + \varepsilon,\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration de :

$$\Sigma_{\Delta}(f_n) - \varepsilon \leq \Sigma_{\Delta}(f) \leq \Sigma^{\Delta}(f) \leq \Sigma^{\Delta}(f_n) + \varepsilon.$$

(f) Soit comme ci-dessus $f = \lim f_n$, la convergence étant uniforme sur $[a, b]$. L'objectif est de trouver, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, une subdivision Δ de $[a, b]$ assez fine pour que :

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq 3\varepsilon.$$

Rien de plus facile ! Sachant que pour tout quadruplet de nombres réels :

$$\alpha \leq \gamma \leq \delta \leq \beta,$$

le petit segment $[\gamma, \delta] \subset [\alpha, \beta]$ a une longueur inférieure au grand :

$$\delta - \gamma \leq \beta - \alpha,$$

on tire des inégalités de la question précédente, pour tout $n \geq N(\varepsilon)$:

$$\Sigma^\Delta(f) - \Sigma_\Delta(f) \leq \Sigma^\Delta(f_n) - \Sigma_\Delta(f_n) + 2\varepsilon,$$

puis en prenant $n := N(\varepsilon)$, il suffit de choisir Δ telle que :

$$\Sigma^\Delta(f_{N(\varepsilon)}) - \Sigma_\Delta(f_{N(\varepsilon)}) \leq \varepsilon,$$

ce qui est possible, puisque $f_{N(\varepsilon)}$ est Riemann-intégrable par hypothèse !

(g) Dans le cours, on a démontré que les fonctions en escalier sont Riemann-intégrables, donc la dernière question **(f)** vient d'établir que leurs limites uniformes — les fonctions réglées — sont aussi Riemann-intégrables.

Exercice 2. (a) D'après un théorème du cours, le complémentaire dans \mathbb{R} d'un ensemble mesurable est toujours mesurable, donc pour tout $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \{f \geq a\} &= E \setminus \{f < a\} \\ &= E \cap (\mathbb{R} \setminus \{f < a\}) \end{aligned}$$

est bel et bien mesurable !

(b) La mesurabilité étant préservée par réunions et par intersections dénombrables, les deux écritures :

$$\{f = -\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f < -n\} \quad \text{et} \quad \{f = +\infty\} = \bigcap_{n \geq 1} \{f \geq n\}$$

font voir le résultat, en utilisant d'ailleurs furtivement **(a)** qui précède.

(c) On écrit :

$$\{a < f < b\} = \{f < b\} \cap \{f > a\},$$

puis, afin de faire voir que le deuxième ensemble est lui aussi mesurable, on le récrit sous la forme adéquate :

$$\begin{aligned} \{f > a\} &= \bigcup_{n \geq 1} \{f \geq a + \frac{1}{n}\} \\ &= \bigcup_{n \geq 1} \left(\underbrace{E \setminus \underbrace{\{f < a + \frac{1}{n}\}}_{\text{mesurable par définition}}}_{\text{mesurable par un théorème connu}} \right). \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{mesurable par un théorème connu}} \end{aligned}$$

(d) Dans l'un des tous premiers théorèmes du cours sur les ensembles mesurables, on a montré en dimension $d = 1$ que tout ouvert $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^1$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints :

$$\mathcal{O} = \bigcup_{n \geq 1}]a_n, b_n[\quad (-\infty \leq a_n < b_n \leq \infty),$$

d'où :

$$f^{-1}(\mathcal{O}) = \bigcup_{n \geq 1} \underbrace{f^{-1}(]a_n, b_n[)}_{\substack{\text{mesurable par (c)} \\ \text{donc mesurable!}}}.$$

Exercice 3. (a) Comme cela a été dit en cours, dans la pratique réelle des exercices, c'est-à-dire dans la vraie vie des mathématiques, on rencontre parfois une fonction mesurable $f: \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie sur un espace-produit :

$$\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2} \quad (d_1 \geq 1, d_2 \geq 1),$$

dont on ignore si elle est Lebesgue-intégrable — telle est la question que l'on se pose !

Alors on lui associe la fonction mesurable positive $|f| \geq 0$, fonction dont on voudrait déterminer si elle est d'intégrale finie, ce qui rendrait l'étudiant(e) très content(e).

Mais comme on peut toujours calculer l'intégrale de $|f| \geq 0$ *puisque'on accepte, dans la théorie, que les intégrales de fonctions mesurables ≥ 0 puisse valoir ∞* , on espère, en utilisant le Théorème de Tonelli qui permet de se ramener à deux intégrales emboîtées en dimensions inférieures $d_1 < d_1 + d_2$ et $d_2 < d_1 + d_2$, pouvoir calculer ou estimer :

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f| = \int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} |f(x, y)| dx \right) dy,$$

et alors — bingo ! —, si le résultat numérique s'avère être *fini*, on peut conclure que f est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^d ! Quel contentement !

Car ensuite, le Théorème de Fubini peut être appliqué puisque l'hypothèse (cruciale) $\int |f| < \infty$ qui apparaît dans son énoncé est satisfaite, et on peut reprendre le calcul que l'on vient de conduire pour $|f|$ et recalculer alors pour f la valeur *finie* de son intégrale en travaillant à nouveau avec des intégrales itérées :

$$\underbrace{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_1}} f(x, y) dx \right) dy}_{\text{en général calculable}} = \int_{\mathbb{R}^d} f.$$

Bien entendu, ces énoncés sont tout aussi vrais pour l'ordre inverse d'intégration itérée :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} |f(x, y)| dy \right) dx,$$

puis :

$$\int_{\mathbb{R}^{d_1}} \left(\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(x, y) dy \right) dx,$$

et la pratique enseigne que si on a fait un mauvais premier choix d'ordre, il y a de bonnes chances que l'ordre inverse ouvre les portes secrètes.

(b) Le théorème de Fatou inverse, avec les limites supérieures, au lieu des limites inférieures, s'énonce comme suit — attention à la frappe sur les doigts de qui oublie l'hypothèse $f_n \leq 0$!

Théorème. [Inégalité généralissime de Fatou inverse] *Étant donné une suite quelconque de fonctions mesurables négatives sur \mathbb{R}^d :*

$$f_n \leq 0 \quad (n \geq 1),$$

à valeurs dans $\{-\infty\} \cup \mathbb{R}_-$, on a :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n. \quad \square$$

(c) Éh bien, le théorème de changement de variables dans les intégrales en théorie de Borel-Lebesgue s'énonce comme suit.

Théorème. [Changement de variables] *Soit $\varphi: U \xrightarrow{\sim} V$ un difféomorphisme \mathcal{C}^1 entre deux ouverts $U \subset \mathbb{R}^d$ et $V \subset \mathbb{R}^d$. Alors pour toute fonction mesurable $f: V \rightarrow \mathbb{C}$, la composée $f \circ \varphi$:*

$$U \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow{f} \mathbb{C}$$

est aussi mesurable, et si f est de plus Lebesgue-intégrable, $f \circ \varphi$ est aussi Lebesgue-intégrable avec la formule :

$$\int_V f(y) dy = \int_U f \circ \varphi(x) |\text{Jac } \varphi(x)| dx. \quad \square$$

(d) Le théorème de dérivation sous le signe intégral d'une intégrale dont l'intégrande est de classe \mathcal{C}^1 par rapport à la variable et au paramètre s'énonce comme suit.

Théorème. [Dérivabilité sous le signe intégral] *Si $E \times I \ni (x, t) \mapsto f(x, t) \in \mathbb{C}$ est une fonction définie sur le produit d'un sous-ensemble mesurable $E \subset \mathbb{R}^d$ par un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ d'intérieur non vide telle que :*

(i) *pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x, t)$ est Lebesgue-intégrable en la variable x sur E ;*

(ii) *pour tout $x \in E$, la fonction $t \mapsto f(x, t)$ est \mathcal{C}^1 , de dérivée :*

$$\frac{\partial f}{\partial t}(x, t);$$

(iii) *il existe une fonction positive $g: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable Lebesgue-intégrable sur E qui domine uniformément :*

$$\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq g(x),$$

pour tout $x \in E$ et tout $t \in I$;

Alors en tout $t \in I$ fixé, la fonction :

$$x \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$$

est Lebesgue-intégrable sur E , et surtout, la fonction :

$$t \mapsto \int_E f(x, t) dx$$

est dérivable sur I de dérivée égale à :

$$\frac{d}{dt} \int_E f(x, t) dx = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx. \quad \square$$

Exercice 4. Soit donc $f: \mathbb{R} \rightarrow \{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ une fonction mesurable intégrable, à savoir dont l'intégrale de la valeur absolue est finie :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty.$$

(a) Le fait que $\{|f| = \infty\}$ est de mesure nulle est un théorème du cours, mais redémontrons-le. Pour tout entier $N \geq 1$, la majoration :

$$N \cdot m(\{|f| \geq N\}) \leq \int |f| < \infty,$$

donne l'inégalité de Tchebychev :

$$m(\{|f| \geq N\}) \leq \frac{\int |f|}{N},$$

dont le membre de droite tend visiblement vers zéro lorsque $N \rightarrow \infty$. Mais puisque :

$$\{|f| = \infty\} = \bigcap_{N \geq 1} \{|f| \geq N\},$$

un théorème du cours sur les intersections dénombrables décroissantes d'ensembles mesurables de mesure finie à partir d'un certain rang — ce qui est le cas ici ! — fait voir la nullité demandée :

$$\begin{aligned} m(\{|f| = \infty\}) &= m\left(\bigcap_{N \geq 1} \{|f| \geq N\}\right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} m(\{|f| \geq N\}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On pourrait aussi raisonner de manière plus directe, mais quelque peu moins rigoureuse, par l'absurde, en supposant que $m(\{|f| = \infty\}) > 0$, ce qui, puisque f est supposée Lebesgue-intégrable, conduirait à un jeu contradictoire d'inégalités :

$$\begin{aligned} \infty &> \int_{\mathbb{R}} |f| \geq \infty \cdot m(\{|f| = \infty\}) \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Notons qu'il serait impossible d'en puiser une contradiction lorsque $0 = m(\{|f| = \infty\})$, puisque $\infty \cdot 0$ n'a pas de valeur fixe attribuable.

(b) Puisque le sujet demande d'appliquer le théorème de convergence dominée, introduisons la suite de fonctions mesurables :

$$f_n(x) := \frac{1}{2n} f(x) \mathbf{1}_{[-n, +n]}(x) \quad (n \geq 1),$$

lesquelles sont constamment dominées par la fonction intégrable f :

$$|f_n(x)| \leq |f(x)| \quad (\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \geq 1),$$

donc le célèbre théorème de Lebesgue s'applique pour offrir sur un plateau ce qui était demandé :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} 0 \\ &= 0! \end{aligned}$$

Subrepticement, on a utilisé ici $0 = m(\{|f| = \infty\})$ de la question (a).

On peut en fait se passer du théorème de convergence dominée, grâce à la majoration élémentaire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \left| \int_{-n}^n f(x) dx \right| &\leq \frac{1}{2n} \int_{-n}^n |f(x)| dx \\ &\leq \frac{1}{2n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx}_{\text{constante} < \infty} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

inégalité qui démontre bien :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n f(x) dx = 0.$$

(c) La fonction $f(x) := 1$ constante égale à 1 n'est bien sûr pas intégrable sur \mathbb{R} (elle est d'intégrale infinie, ce qui est exclu), et la suite :

$$\frac{1}{2n} \int_{-n}^n 1 \cdot dx = 1,$$

est constante égale à 1, donc ne converge pas vers 0.

Plus subtilement, soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ la fonction *paire* définie, pour $x \geq 0$, par :

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } x = k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^k k & \text{lorsque } k - 1 < x < k \quad \text{pour un entier } k \geq 1. \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n f(x) dx &= \frac{2}{2n} \int_0^n f(x) dx \\ &= \frac{1}{n} (-1 + 2 - \dots + (-1)^n n), \end{aligned}$$

somme dont les creux de vague croissent et décroissent alternativement, égale, lorsque $n = 2n' - 1$ avec $n' \geq 1$, à :

$$\begin{aligned} \frac{[-1 + 2] + [-3 + 4] + \cdots + [-(2n' - 3) + (2n' - 2)] - (2n' - 1)}{2n' - 1} &= \frac{\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1}^{n'-1 \text{ fois}} - (2n' - 1)}{2n' - 1} \\ &= \frac{-n'}{2n' - 1} \\ &\xrightarrow{n' \rightarrow \infty} -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et autrement, lorsque $n' = 2n$ est pair, constamment égale à :

$$\begin{aligned} \frac{[-1 + 2] + [-3 + 4] + \cdots + [-(2n' - 3) + (2n' - 2)] + [-(2n' - 1) + (2n')]}{2n'} &= \frac{\overbrace{1 + 1 + \cdots + 1 + 1}^{n' \text{ fois}}}{2n'} \\ &= \frac{n'}{2n'} \\ &= \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

et là, il y a deux limites possibles, $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Un exemple encore plus convaincant faisant voir que la limite de $\frac{1}{2n} \int_{-n}^n f$ n'existe pas forcément est la fonction dérivée :

$$f(x) := \frac{d}{dx}(x \sin x),$$

non intégrable sur \mathbb{R} au sens de Lebesgue (exercice non immédiat) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin x + x \cos x| dx = \infty,$$

tandis que :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \int_{-n}^n \frac{d}{dx}(x \sin x) dx &= \frac{n \sin n - n \sin(-n)}{2n} \\ &= \sin n \end{aligned}$$

oscille sans limite entre -1 et $+1$ lorsque $n \rightarrow \infty$, grâce à un théorème de densité des entiers naturels modulo 2π .

(d) D'après un théorème du cours, toute suite $(h_n)_{n=0}^{\infty}$ de fonctions mesurables intégrables sur \mathbb{R} qui converge presque partout sur \mathbb{R} a toujours pour limite une fonction qui est mesurable. D'ailleurs, la théorie de la mesure est en grande partie érigée dans l'objectif de stabiliser la mesurabilité par passage à des limites dénombrables quelconques.

Rappelons plus précisément que dans le cours, étant donné une suite quelconque $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ de fonctions mesurables, on a démontré que les deux fonctions :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n$$

sont mesurables, et lorsque ces deux fonctions coïncident — partout ou presque partout, cela revient au même —, *i.e.* lorsque h_n converge (presque partout) vers une certaine

fonction-limite $h = \lim h_n$, on en a déduit que :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} h_n = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n$$

est mesurable.

(e) On suppose maintenant que, pour tout $n \geq 1$, il existe une fonction positive intégrable $g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ avec $|h_n| \leq g_n$ dont la suite complète $(g_n)_{n=0}^\infty$ converge presque partout vers une certaine fonction $g := \lim_{n \rightarrow \infty} g_n$ qui est *intégrable* sur \mathbb{R} .

Il est alors clair que les deux fonctions :

$$g_n - h_n \geq 0 \quad \text{et} \quad g_n + h_n \geq 0$$

combinaisons algébriques de fonctions mesurables sont mesurables, et de plus sont *positives*, hypothèse *requise* pour pouvoir appliquer le Théorème — généralissime ! — de Fatou, lequel donne ici deux fois :

$$\begin{aligned} \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (g_n - h_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g_n - h_n), \\ \int \liminf_{n \rightarrow \infty} (g_n + h_n) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (g_n + h_n). \end{aligned}$$

Or $g_n \rightarrow g$ et $h_n \rightarrow h$, donc en faisant extrêmement attention à la manière dont les limites inférieures se distribuent à droite, *i.e.* en n'intervertissant pas le signe moins et la limite inférieure :

$$\begin{aligned} \int g - \int h &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (-h_n), \\ \int g + \int h &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int g_n + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n. \end{aligned}$$

(f) Tout le monde sait en effet qu'il faut se méfier des signes « - » ! Rappelons que les limites inférieure et supérieure d'une suite numérique quelconque $(b_n)_{n=1}^\infty$ sont définies par :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} b_m \right) \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} b_m \right).$$

Ici appliquée à la suite $b_n := -a_n$, cette définition de la limite inférieure peut être transformée en le résultat demandé :

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} (-a_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\inf_{m \geq n} -a_m \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(- \sup_{m \geq n} a_m \right) \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{m \geq n} a_m \right) \\ &= - \limsup_{n \rightarrow \infty} a_n. \end{aligned}$$

(g) Supposons donc que la suite g_n satisfait :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dx.$$

En revenant alors à la fin de la question **(e)** :

$$\begin{aligned}\int g - \int h &\leq \int g + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int (-h_n), \\ \int g + \int h &\leq \int g + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n,\end{aligned}$$

cela permet instantanément de simplifier et d'obtenir :

$$\begin{aligned}- \int h &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(- \int h_n \right), \\ \int h &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n.\end{aligned}$$

Mais la question **(f)** qui précède avait justement préparé le terrain à l'avance pour que l'on puisse remplacer la première limite inférieure par une limite supérieure :

$$\begin{aligned}- \int h &\leq - \limsup_{n \rightarrow \infty} \int h_n, \\ \int h &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n,\end{aligned}$$

et en regardant bien droit dans les yeux ces deux inégalités, l'aigle-étudiant qui sommeille en nous les voit s'articuler instantanément en un tryptique :

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int h_n \leq \int h \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int h_n,$$

ce qui lui permet d'attraper d'un seul coup d'œil sa proie-réponse :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dx,$$

puisque'une limite inférieure est de toute façon toujours *inférieure* à une limite supérieure !

(h) Soit enfin $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ une suite de fonctions mesurables intégrables sur \mathbb{R} qui converge presque partout vers une certaine fonction mesurable f qui est *intégrable*. Traitons d'abord l'implication facile :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \right) \implies \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right).$$

Pour cela, l'inégalité élémentaire valable pour deux nombres réels quelconques $a, b \in \mathbb{R}$:

$$0 \leq ||a| - |b|| \leq |a - b|,$$

qui apparaissait — heureusement ! — comme indication dans le sujet, va expédier la démonstration comme suit :

$$\begin{aligned}0 \leq \left| \left| \int f_n \right| - \left| \int f \right| \right| &\leq \left| \int f_n - \int f \right| \\ &\leq \int |f_n - f|,\end{aligned}$$

car en effet, si le membre de droite tend vers zéro, le membre de gauche aussi !

Pour traiter l'autre implication, principale :

$$\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x) - f(x)| dx = 0 \right) \iff \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f_n(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \right),$$

introduisons, comme cela a été gentiment suggéré par le sujet, les deux fonctions auxiliaires :

$$g_n := 2(|f_n| + |f|) \quad \text{et} \quad h_n := |f_n - f| + |f_n| - |f|,$$

lesquelles satisfont effectivement les conditions requises :

$$g_n \longrightarrow g := 4|f|, \quad h_n \longrightarrow h := 0, \quad |h_n| \leq g_n$$

— on a même $h_n \geq 0$, quoique cela ne serve pas spécialement —, ainsi que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n = \int g,$$

et donc une application directe de la question (g) donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n = \int h = \int 0 = 0,$$

c'est-à-dire en remplaçant h_n :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| + \underbrace{\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| - \int |f|}_{\xrightarrow[n \rightarrow \infty]{=0}},$$

d'où la conclusion :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f|. \quad \square$$

Exercice 5. (a) Les deux fonctions $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto e^{-xt}$ sont mesurables, et on a démontré en cours qu'un produit de fonctions mesurables est encore mesurable.

De plus, la majoration :

$$|e^{-xt} f(x)| \leq |f(x)| \quad (t \in \mathbb{R}_+, x \geq 0),$$

donne après intégration :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{\infty} e^{-xt} f(x) dx \right| &\leq \int_0^{\infty} |e^{-xt} f(x)| dx \\ &\leq \int_0^{\infty} |f(x)| dx \\ &< \infty, \end{aligned}$$

ce qui démontre que $x \mapsto e^{-xt} f(x)$ est Lebesgue-intégrable, puisque $x \mapsto f(x)$ l'est.

(b) Posons :

$$g(x, t) := e^{-xt} f(x).$$

Pour tout t , nous venons de voir que $x \mapsto g(x, t)$ est intégrable sur \mathbb{R}_+ . De plus, $t \mapsto g(x, t)$ est continue sur \mathbb{R}_+ (et même \mathcal{C}^∞ !). Enfin, l'inégalité-clé ci-dessus :

$$|g(x, t)| \leq |f(x)|$$

fournit une fonction-dominatrice intégrable indépendante de t .

Toutes les hypothèses du Théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre sont ainsi satisfaites, et donc, la fonction :

$$\mathbb{R}_+ \ni t \longmapsto L_f(t) := \int_0^\infty e^{-xt} f(x) dx \in \mathbb{R}$$

est bel et bien continue !

(c) À nouveau grâce à la domination intégrable uniforme $|g(x, t)| \leq |f(x)|$, pour toute suite $(t_n)_{n=1}^\infty$ de réels $t_n \rightarrow \infty$ divergeant vers l'infini, le théorème de convergence dominée de Lebesgue s'applique pour donner :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty g(x, t_n) dx = \int_0^\infty \left(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-xt_n} f(x) \right) dx.$$

De l'Exercice 4 **(a)**, rappelons que $0 = m(\{|f| = \infty\})$, donc quitte à corriger f sur cet ensemble de mesure nulle, on peut (on pouvait) supposer (dès le départ !) que $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ ne prend que des valeurs *finies*, et alors il est clair que :

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-xt_n} f(x) \quad (\forall x > 0),$$

et puisque $\int_{]0, \infty[} = \int_{[0, \infty[}$, nous concluons que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-xt_n} f(x) dx = \int_0^\infty 0 \cdot dx = 0.$$

Ceci étant valable quelle que soit la suite $t_n \rightarrow \infty$, on a bien fait voir que :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} L_f(t) = 0.$$

(d) La transformée de Laplace de la fonction $f(x) := e^{-\theta x}$ avec $\theta > 0$ est :

$$L_f(t) = \int_0^\infty e^{-xt} e^{-\theta x} dx = \left[\frac{e^{-x(t+\theta)}}{-t-\theta} \right]_0^\infty = \frac{1}{t+\theta}.$$

(e) Le calcul de la transformée de Laplace de la fonction $f(x) := \mathbf{1}_{\{0 \leq x \leq 1\}} \cdot \sin(x)$ débute astucieusement en douceur comme suit :

$$\begin{aligned} L_f(t) &= \int_0^1 e^{-xt} \sin x dx \\ &= \operatorname{Im} \left(\int_0^1 e^{-xt} e^{ix} dx \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\left[\frac{e^{x(i-t)}}{i-t} \right]_0^1 \right) \\ &= \operatorname{Im} \left(\frac{e^{i-t} - 1}{i-t} \right), \end{aligned}$$

puis, pour faire disparaître les imaginaires au dénominateur, on multiplie en haut et à droite par $(-i - t)$, en notant que $(i - t)(-i - t) = 1 + t^2$:

$$\begin{aligned} L_f(t) &= \operatorname{Im} \frac{(e^{i-t} - 1)(-i - t)}{(i - t)(-i - t)} \\ &= \operatorname{Im} \frac{e^{-t}(-ie^i - te^i) + i + t}{1 + t^2} \\ &= \frac{e^{-t}}{1 + t^2} \operatorname{Im}(-ie^i - te^i) + \frac{1}{1 + t^2} + 0 \\ &= \frac{e^{-t}}{1 + t^2} (-\cos 1 - t \sin 1) + \frac{1}{1 + t^2} \\ &= \frac{1 - e^{-t}(\cos 1 + t \sin 1)}{1 + t^2}. \end{aligned}$$

(f) Le développement classique en série entière de l'exponentielle permet d'écrire :

$$e^{-e^n(T-x)} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} e^{-knx}.$$

Multiplions-le par $f(x)$:

$$e^{-e^n(T-x)} f(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} e^{-knx} f(x).$$

Soit la suite de fonctions définies sur \mathbb{R}_+ :

$$g_n: x \mapsto e^{-e^n(T-x)} f(x) \quad (n \geq 1),$$

qui sont mesurables uniformément dominées par :

$$\begin{aligned} |g_n(x)| &= \left| e^{-e^n(T-x)} f(x) \right| \\ &\leq |f(x)| \end{aligned} \quad (\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall n \geq 1),$$

donc intégrables. D'un autre côté, les termes :

$$\frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} e^{-knx} f(x)$$

ont une somme absolument (car normalement) convergente, puisque :

$$\left| \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} e^{-knx} f(x) \right| \leq \frac{e^{knT}}{k!} |f(x)|,$$

et puisque :

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(e^{nT})^k}{k!} = e^{e^{nT}} < \infty.$$

Cette convergence normale justifie l'interversion entre intégration et sommation infinie dans le calcul suivant :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-e^n(T-x)} f(x) dx &= \int_0^\infty \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} e^{-knx} f(x) \right) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} \int_0^\infty e^{-knx} f(x) dx \\ &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} L_f(kn), \end{aligned}$$

qui aboutit à l'identité demandée.

(g) Lorsque $n \rightarrow \infty$, la suite de fonction $(g_n)_{n=1}^\infty$ introduite dans la question précédente converge simplement vers :

$$g_\infty(x) := \begin{cases} 0 & \text{lorsque } 0 \leq x < T, \\ e^{-1} f(T) & \text{lorsque } x = T, \\ f(x) & \text{lorsque } T \leq x. \end{cases}$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de convergence dominée, ce qui nous donne :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-e^n(T-x)} f(x) dx = \int_T^\infty f(x) dx.$$

(h) Supposons par l'absurde qu'il existe une fonction $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$ dont la transformée de Laplace vaut :

$$e^{-at} = L_f(t) = \int_0^\infty e^{-xt} f(x) dx,$$

pour une certaine constante $a > 0$.

Prenons alors un nombre réel $0 < T$. Les questions (g) et (f) qui précèdent nous permettent alors de représenter la quantité finie :

$$\begin{aligned} \int_T^\infty f(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty e^{-e^n(T-x)} f(x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} L_f(kn) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k}{k!} e^{knT} e^{-akn} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{(-e^{n(T-a)})^k}{k!} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-e^n(T-a)} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{lorsque } 0 < T < a, \\ e^{-1} & \text{lorsque } T = a, \\ 0 & \text{lorsque } T > a. \end{cases} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\int_a^\infty f(x) dx = \frac{1}{e},$$

tandis que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$\int_{a+\varepsilon}^\infty f(x) dx = 0,$$

ce qui contredit un théorème du cours d'après lequel $\int_a^{a+\varepsilon} g$ doit tendre vers 0 avec ε , pour toute fonction intégrable g .

(i) Soit $t_0 > 0$ et soit l'intervalle ouvert l'entourant sans toucher $\{0\}$ à gauche :

$$t_0 \in]\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}[\subset]0, \infty[.$$

La dérivée partielle de $x e^{-xt} f(x)$ par rapport à t est alors majorée par :

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial t} [e^{-xt} f(x)] \right| &\leq | -x e^{-xt} f(x) | \\ &\leq |x e^{-x\frac{t_0}{2}}| \cdot |f(x)| \\ &\leq C_0 \cdot |f(x)|, \end{aligned}$$

la constante $0 < C_0 < \infty$ étant une majorante quelconque de la fonction continue $x \mapsto x e^{-x\frac{t_0}{2}}$, laquelle vaut 0 en $x = 0$ et tend vers 0 lorsque $x \rightarrow \infty$.

Grâce à cette majoration uniforme par la fonction-dominatrice $C_0 |f(x)|$ intégrable sur \mathbb{R}_+ , le théorème de dérivation sous le signe intégral s'applique et offre le caractère \mathcal{C}^1 de $t \mapsto L_f(t)$ sur $]\frac{t_0}{2}, \frac{3t_0}{2}[$, donc sur $]0, \infty[$, puisque le choix initial de $t_0 > 0$ était laissé à notre entière discrétion.

(j) Maintenant, lorsque $f \geq 0$ ne prend que des valeurs positives, la fonction $t \mapsto L_f(t)$ est décroissante, puisque :

$$\begin{aligned} 0 \leq t' \leq t'' < \infty \quad \implies \quad L_f(t') - L_f(t'') &= \int_0^\infty \underbrace{(e^{-xt'} - e^{-xt''})}_{\geq 0 \forall x \geq 0} \underbrace{f(x)}_{\geq 0} dx \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

De l'équivalence :

$$\left(x \mapsto x f(x) \text{ est } L^1 \text{ sur } [0, \infty[\right) \iff \left(t \mapsto L_f(t) \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0, \infty[\right),$$

démontrons en premier lieu l'implication la plus délicate ' \Leftarrow '.

Puisque le caractère \mathcal{C}^1 de $t \mapsto L_f(t)$ sur $]0, \infty[$ est toujours 'gratuitement' vrai, en vertu du résultat de la question (i) qui précède, c'est surtout la dérivabilité $t = 0$ qui est une hypothèse ici, et par la décroissance qui vient d'être observée, l'hypothèse en question est donc que la limite suivante existe et est positive finie :

$$\begin{aligned} 0 \leq -L'_f(0) &= \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\ &= \lim_{t \xrightarrow{>} 0} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t} f(x) dx. \end{aligned}$$

Or pour faire voir que $x \mapsto x f(x)$ est L^1 sur $[0, \infty[$, un bon Coup de Fatou là où il faut — qui s'applique car $\frac{1 - e^{-xt}}{t} f(x) \geq 0$, mais de grâce ! Monsieur de Marçay ! pas de

frappe sur nos doigts fragiles ! — permet de vérifier que l'on a effectivement la finitude de l'intégrale :

$$\begin{aligned}
 0 &\leq \int_0^\infty x f(x) dx \stackrel{?}{<} \infty \\
 \text{[Reconnaître une dérivée]} &= \int_0^\infty \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-xt}}{t} f(x) dx \\
 \text{[lim = lim inf]} &= \int_0^\infty \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-xt}}{t} f(x) dx \\
 \text{[Coup de Fatou !]} &\leq \liminf_{t \rightarrow 0^+} \int_0^\infty \frac{1 - e^{-xt}}{t} f(x) dx \\
 &= \liminf_{t \rightarrow 0^+} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\
 \text{[lim = lim inf]} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{L_f(0) - L_f(t)}{t} \\
 &= -L'_f(0) \\
 &\text{oui} \\
 &< \infty,
 \end{aligned}$$

ce qui montre que $x \mapsto x f(x)$ est bien L^1 sur $[0, \infty[$.

L'implication inverse ' \Rightarrow ' est en fait plus facile, et généralement vraie sans supposer que $f \geq 0$. Supposons donc $x \mapsto x |f(x)|$ intégrable sur $[0, \infty[$. À nouveau grâce au théorème de dérivation sous le signe intégral, comme dans la question (i), mais maintenant sur $[0, \infty[$ en *incluant* l'extrémité gauche $\{0\}$, on a la majoration uniforme de la dérivée partielle par rapport à t :

$$| -x e^{-xt} f(x) | \leq x |f(x)|,$$

par une fonction indépendante de t qui *est* intégrable sur $[0, \infty[$, et donc — youpi ! c'est enfin fini ! —, le théorème de dérivation sous le signe intégral tord le cou à cette dernière implication !
