Thème 9: Puissances et racines

9.1 Les puissances entières

Rappels :

- La **puissance *n*-ème d'un nombre *a*** est le produit de n facteurs égaux à a (avec $a \in \mathbb{N}$).
- a s'appelle **la base** et n **l'exposant** de la puissance.
- On note:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

- Par convention: $a^0 = 1$ (pour tout $a \neq 0$)

Exemples : **a)** $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$

b) $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Propriétés : Soit a et b des nombres réels, m et n des entiers naturels non nuls.

(I) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ • $5^3 \cdot 5^4 = 5^{\cdots}$

(II) $\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$ • $\left(4^2\right)^3 = 4^{\cdots}$

(III) $\boxed{\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n}$ • $3^2 \cdot (-1)^2 = \ldots\ldots^2$

(IV) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad (b \neq 0)}$ • $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \ldots\ldots$

(V) $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{si } m > n \\ 1 & \text{si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{si } m < n \end{cases}}$

- $\frac{2^6}{2^4} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- $\frac{3^5}{3^9} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Modèle 1 : Justifier les réponses suivantes:

a) $7^3 \cdot 7^2 = 7^5$ car

b) $\left(7^2\right)^3 = 7^6$ car

c) $\frac{3^4}{3^7} = \frac{1}{3^3}$ car

Exercice 9.1: Calculer sans machine:

a) $\left(2^2\right)^3$ **b)** $2^{\left(2^3\right)}$ **c)** $\left(2^3\right)^2$

d) $2^3 - 3^2$ **e)** $3^2 + 3^4$ **f)** $10^3 + 10^2$

g) $\left(\frac{1}{3}\right)^4$ **h)** $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ **i)** $\left(-\frac{3}{2}\right)^4$

j) $\left(\sqrt{2}\right)^4$ **k)** $\left(\sqrt{5}\right)^6$ **l)** $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^8$

Exercice 9.2: Calculer sans machine:

a) $\frac{2^6}{2^2}$ **b)** $\frac{-2^6}{2^3}$ **c)** $\frac{(-2)^6}{2^3}$

d) $\frac{2^{10}}{2^{12}}$ **e)** $\frac{2^4}{-2^5}$ **f)** $\frac{2^4}{(-2)^5}$

g) $\left(\frac{2}{2^3}\right)^2$ **h)** $\left(-\frac{2^7}{2^6}\right)^3$ **i)** $\left(\frac{2^0}{2^2}\right)^2$

j) $\frac{2^{16}}{4^7}$ **k)** $\frac{9^5}{3^{10}}$ **l)** $\left(\frac{5^3}{25^2}\right)^2$

Question : $2^3 = 8$. Mais que pourrait valoir 2^{-3} ?

Définition : Tout en gardant les propriétés précédentes valides, nous allons définir les puissances à exposant négatif par:

$$\textbf{(VI)} \quad \boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Modèle 2 : **a)** $3^{-4} =$

b) $(-2)^{-3} =$

Nouvelles propriétés : À la liste des propriétés précédentes, nous pouvons compléter

(V') $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ • $\dfrac{3^2}{3^9} = \ldots\ldots$

(VII) $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n \quad (a, b \neq 0)}$ • $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{\ldots}{\ldots}\right)^2$

Modèle 3 : Justifier la réponse suivante:

a) $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\dfrac{4}{3}\right)^2$ car

Exercice 9.3: Calculer sans machine:

a) $2^{-1} \cdot 2^{-2}$ **b)** $3^{-4} \cdot 3^4$ **c)** $4^0 \cdot 4^{-5} \cdot 4^3$

d) $a^{-3} \cdot a^4$ **e)** $\dfrac{2^{-3}}{3^2}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

g) $\dfrac{2^3}{3^{-2}}$ **h)** $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$ **i)** $\left(\dfrac{1}{5}\right)^2 \cdot \left(\dfrac{2}{5}\right)^{-2}$

Modèle 4 : Compléter les écritures suivantes:

a) $2^{-3} \cdot 2^4 = \dfrac{1}{2^{\cdots}}$ car

b) $\left(2^{-3}\right)^4 = 4^{\cdots}$ car

c) $\dfrac{2^5}{4^{-3}} = 2^{\cdots}$ car

d) $\dfrac{9^{-2}}{36^{-2}} = \ldots^{\cdots}$ car

e) $2^{-3} \cdot 5^{-3} = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\cdots}$ car

Exercice 9.4: En détaillant le calcul si nécessaire, compléter les écritures suivantes:

a) $2^3 \cdot 2^4 \cdot 2^{-5} = 2^{\cdots}$ **b)** $\left(3^4\right)^2 = \dfrac{1}{3^{\cdots}}$ **c)** $\dfrac{3^8}{3^2} = 9^{\cdots}$

d) $\dfrac{3^2}{3^6} = 9^{\cdots}$ **e)** $\dfrac{5}{25^2} = 5^{\cdots}$ **f)** $2^3 \cdot 2^9 = 4^{\cdots}$

g) $36^2 \cdot 6^{-2} = \dfrac{1}{6^{\cdots}}$ **h)** $\left(-\dfrac{1}{5}\right)^{-3} = \ldots^3$ **i)** $\left(\dfrac{1}{25}\right)^{-3} = 5^{\cdots}$

j) $\left(\dfrac{2^3}{2^5}\right)^{-3} = 2^{\cdots}$ **k)** $\left(\dfrac{2^{-1}}{2^3}\right)^2 = 2^{\cdots}$ **l)** $\left(\dfrac{3^{-4}}{9^2}\right)^2 = 9^{\cdots}$

9.2 Les racines

Exercice 9.5: Vérifier avec la calculatrice les égalités suivantes:

a) $\sqrt{4+\sqrt{12}} = 1+\sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{10+6\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$

Comment pourrait-on les justifier *sans calculatrice* ?

Définition : Soit a un nombre réel positif et n un entier naturel supérieur à 1, on appelle **racine *n*-ième de *a***, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre positif r tel que $r^n = a$. En d'autres termes:

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad r^n = a \text{ et } \boldsymbol{r \geq 0}}$$

- Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle **racine carrée** et se note $\sqrt{}$ au lieu de $\sqrt[2]{}$.
- Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle **racine cubique**.

Modèle 5 : **a)** $\sqrt[3]{125} =$ .... car ....

b) $\sqrt[4]{81} =$ .... car ....

Exercice 9.6: En justifiant dans quelques cas, calculer sans machine:

a) $\sqrt{0}$ **b)** $\sqrt{0{,}04}$ **c)** $\sqrt{0{,}0009}$

d) $\sqrt[3]{1000}$ **e)** $\sqrt[5]{32}$ **f)** $\sqrt[4]{16}$

g) $\sqrt[3]{0{,}027}$ **h)** $\sqrt[4]{0{,}0001}$ **i)** $\sqrt[3]{0{,}125}$

j) $\sqrt{0{,}0001}$ **k)** $\sqrt[3]{0{,}000008}$

Question : Que pourrait valoir $\sqrt[3]{-125}$?

Ou plus généralement, qu'en est-il de $\sqrt[n]{a}$ si a est négatif ? Il s'agit alors d'étendre la définition pour des valeurs de $a < 0$:

Définition :

- Si $a < 0$ et n est un **entier impair**, on définit la racine n-ième par:

$$r = \sqrt[n]{a} \quad \Leftrightarrow \quad r^n = a$$

- Si $a < 0$ et n est un **entier pair**, la racine n-ième de a **n'est pas définie**.

Modèle 6 : **a)** $\sqrt[3]{-8} =$ .... car ....

b) $\sqrt[4]{-16} =$ ....

Exercice 9.7: En justifiant dans quelques cas, calculer sans machine:

a) $\sqrt[3]{-27}$	**b)** $\sqrt[5]{-1}$	**c)** $\sqrt[2]{-4}$
d) $\sqrt[3]{(-2)^3}$	**e)** $\sqrt{(-2)^2}$	**f)** $\sqrt[3]{-0{,}125}$
g) $\sqrt[3]{-0{,}027}$	**h)** $\left(\sqrt[4]{-1}\right)^2$	**i)** $\sqrt{(-2)^4}$

Propriétés : Soit a et b des nombres **réels positifs**, n un entier naturel non nul.

(VIII) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ • $\left(\sqrt[3]{2}\right)^3 =$

(IX) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$ • $\sqrt[3]{5^3} =$

(X) $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$ • $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$

(XI) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0)}$ • $\sqrt[3]{\frac{25}{8}} =$

Mise en garde : Contrairement au cas de la multiplication, on ne peut pas "casser" la racine d'une somme en somme de racines. Réciproquement, on ne peut pas directement regrouper une somme de racines:

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

Modèle 7 : Sans calculatrice, calculer:

a) $\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt[4]{3}=$

b) $\sqrt[4]{\dfrac{81}{16}}=$

Exercice 9.8: Calculer sans machine:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{4}}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ **b)** $\sqrt{2^2}$ **c)** $\sqrt{9+1}$

d) $\sqrt[4]{8}\cdot\sqrt[4]{32}$ **e)** $\sqrt{2^6}$ **f)** $\sqrt{9}+\sqrt{3}$

g) $\sqrt[3]{-\dfrac{27}{1000}}$ **h)** $\left(\sqrt[4]{0{,}0001}\right)^4$ **i)** $\sqrt[5]{2^{10}}$

Modèle 8 : Sachant que $\sqrt{5}\cong 2{,}24$ et $\sqrt{50}\cong 7{,}07$, calculer

a) $\sqrt{500}=$

b) $\sqrt{0{,}005}=$

Exercice 9.9: Sachant que $\sqrt{27}\cong 5{,}19$ et $\sqrt{270}\cong 16{,}43$, calculer:

a) $\sqrt{2700}$ **b)** $\sqrt{27'000}$ **c)** $\sqrt{270'000}$

d) $\sqrt{0{,}27}$ **e)** $\sqrt{0{,}027}$ **f)** $\sqrt{0{,}000027}$

Exercice 9.10: Sachant que $\sqrt[3]{27}=3$, $\sqrt[3]{270}\cong 6{,}46$ et $\sqrt[3]{2700}\cong 13{,}92$, calculer:

a) $\sqrt[3]{27'000}$ **b)** $\sqrt[3]{270'000}$ **c)** $\sqrt[3]{2'700'000}$

d) $\sqrt[3]{0{,}27}$ **e)** $\sqrt[3]{0{,}027}$ **f)** $\sqrt[3]{0{,}00027}$

Modèle 9 : Sachant que $\sqrt{2}\cong 1{,}41$, estimer sans calculatrice les nombres suivants:

a) $\sqrt{8}=$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}=$

c) $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=$

Exercice 9.11: Sachant que $\sqrt{3} \cong 1,73$, estimer sans calculatrice les nombres suivants:

a) $\sqrt{300}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

Les 3 réflexes : **a)** L'expression sous une racine doit être "la plus petite" possible:

- $\sqrt{72} =$
- $\sqrt{49+1} =$

b) On ne laisse pas de racine au dénominateur d'une fraction:

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}} =$
- $\dfrac{2}{5\sqrt{5}} =$

c) On ne laisse pas de racine de fractions:

- $\sqrt{\dfrac{8}{3}} =$
- $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}} =$

Exercice 9.12: En respectant les 3 réflexes précédents, simplifier:

a) $\sqrt{300}$ **b)** $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{4}{3}}$

d) $\sqrt{2^7}$ **e)** $2\sqrt{1000}$ **f)** $\sqrt{\dfrac{39}{2}} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{3}}$

g) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ **h)** $\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}$ **i)** $\dfrac{9}{2\sqrt{3}}$

j) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ **k)** $\sqrt{162}$ **l)** $\dfrac{2}{\sqrt{8}}$

9.3 Les puissances à exposants rationnels

Exercice 9.13: À l'aide de la calculatrice, calculer:

a) $25^{\frac{1}{2}}$ **b)** $27^{\frac{1}{3}}$ **c)** $27^{\frac{2}{3}}$

Que constatez-vous ?

Définition : Tout en gardant les propriétés précédentes valides, nous allons définir les puissances à exposant rationnel par:

1) Si n est **pair** et a un réel **positif**:

$$\textbf{(XII)} \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

2) Si n est **impair** et a un réel **quelconque**:

$$\textbf{(XII')} \quad \boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$$

En effet, dans ce deuxième cas, la racine peut-être calculée même si a est négatif. Par exemple:

$$(-1)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-1} = -1$$

Modèle 10 : Écrire à l'aide d'une racine et simplifier:

a) $4^{\frac{1}{2}} =$

b) $5^{-0,5} =$

Exercice 9.14: Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier:

a) $5^{1/2}$ **b)** $4^{3/2}$ **c)** $16^{1/4}$

d) $32^{1/10}$ **e)** $9^{3/2}$ **f)** $25^{0,5}$

g) $\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **h)** $\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ **i)** $2^{-1/2}$

j) $9^{-1,5}$ **k)** $5^{6/5}$ **l)** $\dfrac{2}{8^{1/2}}$

Exercice 9.15: Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels:

a) $\sqrt[5]{3}$ **b)** $\sqrt[11]{5^6}$ **c)** $\sqrt[9]{3^3}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ **f)** $\sqrt[3]{3^9}$

Modèle 11 : Simplifier les expressions suivantes:

a) $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2^3} =$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}} =$

c) $\sqrt{2 \cdot \sqrt{2}} =$

Exercice 9.16: Simplifier les expressions suivantes:

a) $\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt{2}$ **b)** $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[3]{3^2}$ **c)** $\sqrt[3]{25}\cdot\sqrt[6]{5}$

d) $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2^2}}$ **f)** $\sqrt{2\cdot\sqrt{2\cdot\sqrt{2}}} =$

Exercice 9.17:

- Dans votre formulaire, vous trouvez ces *nouvelles* formules:

  a) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$ **b)** $\sqrt[m\cdot n]{a^{m\cdot p}} = \sqrt[n]{a^p}$

  À vous de les justifier…

- À l'aide de ces formules, simplifier les expressions suivantes:

  c) $\sqrt{\sqrt[3]{2}}$ **d)** $\sqrt[6]{2^9}$ **e)** $\sqrt[3]{\sqrt{36^3}}$

Exercice 9.18: Les racines… Ce n'est pas si compliqué ;-)
À l'aide d'une calculatrice, estimer le nombre suivant:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}}}}}$$

Exercice 9.19: Les racines… un peu plus délicat
À l'aide d'une calculatrice, estimer le nombre suivant:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+6\sqrt{1+7\sqrt{1+8\sqrt{1+\ldots}}}}}}}}$$