Corrigé de l'examen du 18 avril 2013 (durée 2h)

Documents et calculatrices interdits. Toute utilisation d'un résultat du cours devra être soigneusement justifiée. Les trois exercices sont indépendants.

Exercice 1 : On considère la matrice Q de taille 7×7 suivante :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/5 & 0 & 2/5 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8/9 & 0 & 0 & 1/9 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/9 & 0 & 8/9 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

où $\alpha \geq 0$.

a) Pour quelle valeur de α, Q est-elle une matrice stochastique ?

b) Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov associée à la matrice de transition Q, pour la valeur de α trouvée à la question 1). Dessiner le graphe de $(X_n)_{n\geq 0}$ en précisant les probabilités de transition entre les différents états.

c) Déterminer les classes d'états récurrents et transitoires.

d) La chaîne est-elle irréductible ?

e) Calculer $\mathbb{P}_1(X_2 = 3)$, $\mathbb{P}_7(X_2 = 4)$ et $\mathbb{P}_5(X_2 = 5)$.

Exercice 2 : Soit θ un paramètre tel que $0 < \theta < 1$. On considère la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ définie par $X_0 = x$ p.s. avec $0 < x < 1$, et pour tout $n \geq 0$,

$$X_{n+1} = \theta X_n + (1-\theta)\varepsilon_{n+1},$$

où $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ est une suite de v.a. à valeurs dans $\{0,1\}$ p.s. et vérifiant

$$\mathbb{E}(f(\varepsilon_{n+1}) \,|\, \mathcal{F}_n) = X_n f(1) + (1-X_n) f(0),$$

pour toute fonction borélienne positive f, et où $(\mathcal{F}_n)_{\geq 0}$ est la filtration naturelle de $(X_n)_{n\geq 0}$, *i.e.* $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, X_1, \ldots, X_n)$ (c'est-à-dire que conditionnellement à $\mathcal{F}_n$, ε_{n+1} suit une loi de Bernoulli de paramètre X_n).

a) Vérifier que pour tout $n \geq 0$, on a bien $0 < X_n < 1$ p.s.

b) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.

c) Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge dans L^2 et presque sûrement vers une certaine v.a. que l'on notera X_∞.

d) Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}\big((X_{n+1} - X_n)^2\big) = (1-\theta)^2 \mathbb{E}\big(X_n(1-X_n)\big).$$

Indication : Commencer par calculer $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}^2)$ et $\mathbb{E}(X_n \varepsilon_{n+1})$ en conditionnant par $\mathcal{F}_n$.

e) En déduire que $\mathbb{E}(X_\infty(1 - X_\infty)) = 0$.

f) Déterminer la loi de X_∞.

Exercice 3 : On considère une marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^2$. Pour cela, soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires sur $\mathbb{Z}^2$ indépendantes et identiquement distribuées, de loi

$$\mathbb{P}(X_1 = (1,0)) = \mathbb{P}(X_1 = (-1,0)) = \mathbb{P}(X_1 = (0,1)) = \mathbb{P}(X_1 = (0,-1)) = \frac{1}{4}.$$

On définit la marche aléatoire $(S_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{Z}^2$ par $S_0 = (0,0)$ et $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, pour tout $n \geq 1$. Pour un vecteur ξ de $\mathbb{Z}^2$, on note $\xi = (\xi^1, \xi^2)$ ses coordonnées sur $\mathbb{Z}$.

a) Montrer que $(S_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov sur $\mathbb{Z}^2$.

b) Montrer que les suites $(X_n^1)_{n\geq 1}$ et $(X_n^2)_{n\geq 1}$ sont deux suites de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées sur $\mathbb{Z}$, de loi $\frac{1}{4}\delta_1 + \frac{1}{4}\delta_{-1} + \frac{1}{2}\delta_0$.

c) A-t-on indépendance entre les suites $(X_n^1)_{n\geq 1}$ et $(X_n^2)_{n\geq 1}$?

d) On introduit, pour tout n, les v.a. $Y_n^1 = X_n^1 + X_n^2$ et $Y_n^2 = X_n^1 - X_n^2$, et $R_n^1 = S_n^1 + S_n^2$ et $R_n^2 = S_n^1 - S_n^2$, de telle sorte que $R_n^1 = \sum_{i=1}^n Y_i^1$ et $R_n^2 = \sum_{i=1}^n Y_i^2$. Calculer le loi jointe de (Y_n^1, Y_n^2).

e) En déduire que $(Y_n^1)_{n\geq 1}$ et $(Y_n^2)_{n\geq 1}$ sont deux suites *indépendantes* de v.a. indépendantes et identiquement distribuées sur $\mathbb{Z}$ de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$.

f) Montrer que $\mathbb{P}(R_{2n}^1 = 0) = \mathbb{P}(R_{2n}^2 = 0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$.

g) En déduire $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0))$.

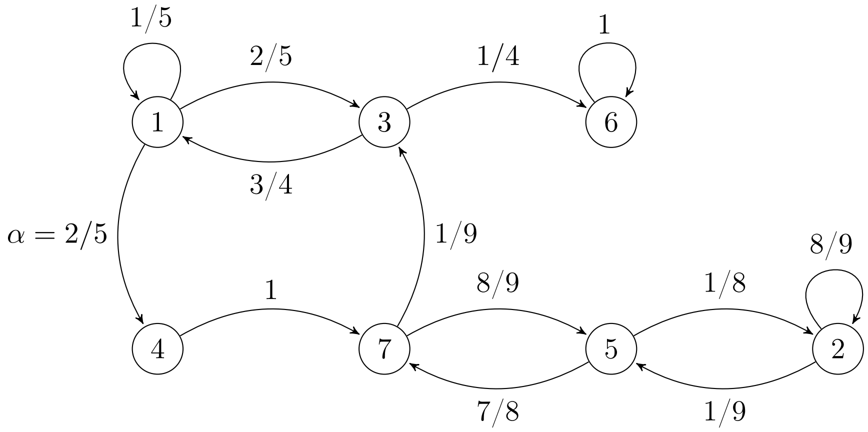
h) Que vaut $\mathbb{P}(S_{2n+1} = (0,0))$?

i) Montrer que $(0,0)$ est récurrent. *On pourra utiliser la formule de Stirling :* $n! \underset{+\infty}{\sim} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Solution de l'exercice 1.

a) Il faut que la somme des coefficients de la première ligne soit égale à 1, d'où $\alpha = 2/5$.

b) On obtient le graphe suivant :



c) Du graphe, on obtient qu'il y a une classe récurrente $\{6\}$, et une classe transiente $\{1,2,3,4,5,7\}$.

d) Non, sinon elle n'admettrait qu'une seule classe.

e) La loi de X_2 sous $\mathbb{P}_x$ est donnée par $\mathbb{P}_x(X_2 = y) = \sum_z Q(x,z)Q(z,y)$, d'où

$$\mathbb{P}_1(X_2 = 3) = Q(1,1)Q(1,3) = 2/25$$
$$\mathbb{P}_7(X_2 = 4) = 0$$
$$\mathbb{P}_5(X_2 = 5) = Q(5,7)Q(7,5) + Q(5,2)Q(2,5) = 7/8 \times 8/9 + 1/8 \times 1/9 = 57/72 = 19/24.$$

Solution de l'exercice 2.

a) Par hypothèse $0 < X_0 < 1$. Supposons par récurrence que $0 < X_n < 1$. Alors comme $0 < \theta < 1$ et que ε_{n+1} est à valeurs dans $\{0, 1\}$, on a $X_{n+1} > 0$ et $X_n < \theta + 1 - \theta = 1$.

b) X_n est évidemment $\mathcal{F}_n$-mesurable, et dans L^1 car bornée par la question précédente. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) &= \mathbb{E}(\theta X_n + (1-\theta)\varepsilon_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \\
&= \theta X_n + (1-\theta)\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n) \quad \text{car } X_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable} \\
&= \theta X_n + (1-\theta) X_n \qquad \text{par définition de } \varepsilon_{n+1} \\
&= X_n.
\end{aligned}$$

Donc $(X_n)_{n\geq 0}$ est bien une $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$-martingale.

c) Comme $0 < X_n < 1$, $(X_n)_n$ est une martingale positive bornée dans L^2 (et aussi dans L^1), *i.e.* $\sup_n \mathbb{E}(|X_n|^2) < \infty$, elle converge donc p.s. et dans L^2.

d) On a

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) &= \mathbb{E}((\theta X_n - X_n + (1-\theta)\varepsilon_{n+1})^2) \\
&= (1-\theta)^2 \mathbb{E}(X_n^2) + (1-\theta)^2 \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}^2) - 2(1-\theta)^2 \mathbb{E}(X_n \varepsilon_{n+1}).
\end{aligned}$$

Or, comme $\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}^2) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\varepsilon_{n+1}^2 \,|\, \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n)$ et de même $\mathbb{E}(X_n \varepsilon_{n+1}) = \mathbb{E}(X_n \mathbb{E}(\varepsilon_{n+1} \,|\, \mathcal{F}_n)) = \mathbb{E}(X_n^2)$, on obtient bien le résultat demandé.

e) Comme X_n converge dans L^2, elle est de Cauchy pour la norme L^2 (l'espace L^2 étant complet), et donc $\mathbb{E}((X_{n+1} - X_n)^2) \to 0$ (on peut aussi appliquer le théorème de convergence dominée). De plus par convergence dominée, on a $\mathbb{E}(X_n(1 - X_n)) \to \mathbb{E}(X_\infty(1 - X_\infty))$, d'où le résultat.

f) Comme $X_\infty(1 - X_\infty) \in [0, 1]$ p.s., et $\mathbb{E}(X_\infty(1 - X_\infty)) = 0$, on a $X_\infty(1 - X_\infty) = 0$ p.s., c'est-à-dire $X_\infty = 0$ ou 1 p.s. Donc X_∞ suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{E}(X_\infty) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = x$ car X_n est une martingale.

Solution de l'exercice 3.

a) Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{Z}^2$ tels que $\mathbb{P}(S_1 = x_1, \ldots, S_n = x_n) > 0$. Alors,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_{n+1} = x_{n+1} \,|\, S_1 = x_1, \ldots, S_n = x_n) &= \mathbb{P}(S_n + X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, S_1 = x_1, \ldots, S_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}(x_n + X_{n+1} = x_{n+1} \,|\, S_1 = x_1, \ldots, S_n = x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} - x_n),
\end{aligned}$$

par indépendance entre X_{n+1} et les v.a. $S_1, \ldots, S_n$. De même, $\mathbb{P}(S_{n+1} = x_{n+1} \,|\, S_n = x_n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} - x_n)$, et donc $(S_n)_n$ est une chaîne de Markov.

b) On voit que (X_n^1) est une suite de v.a. i.i.d. car (X_n) l'est. Pour déterminer la loi, on calcule :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1^1 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = (1, 0)) = 1/4 \\
\mathbb{P}(X_1^1 = -1) &= \mathbb{P}(X_1 = (-1, 0)) = 1/4 \\
\mathbb{P}(X_1^1 = 0) &= \mathbb{P}(X_1 = (0, 1)) + \mathbb{P}(X_1 = (0, -1)) = 1/2.
\end{aligned}$$

On obtient de même pour la suite (X_n^2).

c) Les suites (X_n^1) et (X_n^2) ne sont pas indépendantes, car par exemple

$$\mathbb{P}(X_1^1 = 0, X_1^2 = 0) = 0 \neq \mathbb{P}(X_1^1 = 0)\mathbb{P}(X_1^2 = 0),$$

(si l'une des coordonnées est nulle, l'autre est forcément non nulle).

d) Les v.a. Y_n^1 et Y_n^2 sont à valeurs dans $\{-1, 1\}$, et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_1^1 = 1, Y_1^2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = (1,0)) = 1/4 \\
\mathbb{P}(Y_1^1 = 1, Y_1^2 = -1) &= \mathbb{P}(X_1 = (0,1)) = 1/4 \\
\mathbb{P}(Y_1^1 = -1, Y_1^2 = 1) &= \mathbb{P}(X_1 = (0,-1)) = 1/4 \\
\mathbb{P}(Y_1^1 = -1, Y_1^2 = -1) &= \mathbb{P}(X_1 = (-1,0)) = 1/4.
\end{aligned}$$

e) Les suites $(Y_n^1)_{n\geq 1}$ et $(Y_n^2)_{n\geq 1}$ sont des suites de v.a. indépendantes par indépendance des v.a. X_n. On a de plus par la question précédente en calculant les lois marginales que $\mathbb{P}(Y_1^1 = 1) = \mathbb{P}(Y_1^1 = -1) = 1/2$, et de même pour Y_n^2, ce qui donne et la loi des v.a. et l'indépendance des deux suites.

f) La suite (R_n^1) est donc une suite de v.a. i.i.d. de loi $\frac{1}{2}\delta_1 + \frac{1}{2}\delta_{-1}$, c'est-à-dire une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$. Pour avoir $\{R_{2n}^1 = 0\}$, il faut que exactement n v.a. Y_i^1 soient égales à $+1$ et n v.a. égales à -1. Il y a $\binom{2n}{n}$ choix possibles de ces variables, on obtient donc par indépendance

$$\mathbb{P}(R_{2n}^1 = 0) = \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}.$$

De même pour la suite (R_n^2).

g) Les suites (R_n^1) et (R_n^2) étant indépendantes par la question e), on obtient

$$\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}(R_{2n}^1 = 0, R_{2n}^2 = 0) = \mathbb{P}(R_{2n}^1 = 0)\mathbb{P}(R_{2n}^2 = 0) = \binom{2n}{n}^2 \frac{1}{4^{2n}}.$$

h) La suite (S_n) ne pouvant revenir en l'origine en un nombre impair de pas, on a $\mathbb{P}(S_{2n+1} = (0,0)) = 0$.

i) Par la formule de Stirling, on a

$$\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n)!}{n!n!}\frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{(2n)^{2n}e^{-2n}\sqrt{4\pi n}}{2^{2n}n^{2n}e^{-2n}2\pi n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}},$$

on obtient donc $\mathbb{P}(S_{2n} = (0,0)) \sim \frac{1}{\pi n}$, d'où, notant $N_0 = \sum_n \mathbb{1}_{\{S_{2n}=(0,0)\}}$ le nombre de retour en $(0,0)$, on obtient

$$\mathbb{E}(N_0) = \sum_n \mathbb{P}(S_{2n} = (0,0)) = +\infty$$

la série des $\frac{1}{n}$ étant divergente. L'espérance du nombre de retour en $(0,0)$ est donc infinie, et comme (S_n) est une chaîne de Markov, on obtient que $(0,0)$ est récurrent.