Corrigé
Examen de Mathématiques
MAT112, groupe PHG-S1

Autour du cours

(1)a) L'assertion $a)$ est fausse. Prenons $E = F = \{-1, 0, 1\}$, $A = \{0, 1\}$ et $f : x \mapsto x^2$. Dans cet exemple, on a $f(A) = \{f(0), f(1)\} = \{0, 1\}$, ce qui donne $f^{-1}(f(A)) = \{-1, 0, 1\}$. L'ensemble $f^{-1}(f(A))$ n'est pas inclus dans A dans cet exemple.

b) L'assertion $b)$ est vraie. Soit $A \subset E$, montrons que $A \subset f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in A$, on a alors $f(x) \in f(A)$ et donc par définition de l'image réciproque $x \in f^{-1}(f(A))$.

(2) On suppose que $g \circ f$ est injective, montrons que f est injective. Soient x, y des éléments de E tels que $f(x) = f(y)$, montrons que $x = y$. On a $g \circ f(x) = g[f(x)] = g[f(y)] = g \circ f(y)$, ce qui entraîne, comme $g \circ f$ est injective, $x = y$. L'application f est bien injective.

(3)a) L'ensemble $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = x,\, z \geqslant 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel. En effet, $(0, 0, 1)$ est un élément de A tandis que $(0, 0, -1) = (-1) \cdot (0, 0, 1)$ n'est pas un élément de A, ce qui montre que A n'est pas stable par multiplication par un scalaire.

b) L'ensemble $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\}$ n'est pas un sous espace vectoriel. En effet, $(1, -1, 0)$ et $(1, 1, 0)$ sont des éléments de B tandis que $(2, 0, 0) = (1, -1, 0) + (1, 1, 0)$ n'est pas un élément de B, ce qui montre que B n'est pas stable par addition.

(4)a) L'application f n'est pas linéaire. En effet, on remarque que $f(0, 0) \neq (0, 0, 0)$.

(b) L'application g est linéaire. Soient $u = (x, y, z)$, $v = (x', y', z')$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$, soient λ, μ des scalaires, il vient

$$\begin{aligned} g(\lambda u + \mu v) &= (3\lambda z + 3\mu z', -\lambda x - \mu x', \lambda x + \mu x') \\ &= \lambda(3z, -x, x) + \mu(3z', -x', x') \\ &= \lambda g(u) + \mu g(v) \end{aligned}$$

Exercice 1

(1) Montrons que $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + y = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$. Le vecteur nul est bien un élément de V, donc V est non vide. Soient $u = (x, y)$, $v = (x', y')$ des vecteurs de V, soient λ, μ deux scalaires, montrons que $\lambda u + \mu v$ est un vecteur de V. On a $\lambda u + \mu v = (\lambda x + \mu x', \lambda y + \mu y')$. On remarque que

$$2(\lambda x + \mu x') + \lambda y + \mu y' = \lambda(2x + y) + \mu(2x' + y') = 0,$$

car u et v sont des éléments de V. Le vecteur $\lambda u + \mu v$ est bien un élément de V. Déterminons maintenant une base de V. Soit $u = (x, y)$ un élément de V, u s'écrit $u = (x, -2x) = x(1, -2)$. Le vecteur $(1, -2)$ est donc générateur pour V. Comme il est non nul, on en déduit que la famille $\{(1, -2)\}$ est libre et donc que c'est une base de V.

(2) L'ensemble $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y - 2z = 0 \text{ et } y + z = 0\}$ est non vide et stable par combinaisons linéaires, c'est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Déterminons une base de W. Soit $u = (x, y, z)$ un élément de W, on a alors $y = -z$ et $z = 3x$, ce qui donne $u = (x, -3x, 3x) = x(1, -3, 3)$. Le vecteur $(1, -3, 3)$ est donc

générateur de W. Comme il est non nul, on en déduit que la famille $\{(1,-3,3)\}$ est libre et donc que c'est une base de W.

(3)a) On vérifie mécaniquement que l'application est linéaire.

(3)b) Déterminons le noyau de f.

$$\begin{aligned}
u=(x,y)\in\ker(f) &\Leftrightarrow f(u)=0\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcll} 3x & +2y & = & 0 & L_1\\ x & -y & = & 0 & L_2\\ x & +2y & = & 0 & L_3\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrcll} 3x & +2y & = & 0 & L_1\\ x & -y & = & 0 & L_2\\ -2x & & = & 0 & L_3\leftarrow L_3-L_1\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 0\\ y & = & 0\end{array}\right.\\
&\Leftrightarrow u=(0,0)
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\ker(f)=\{(0,0)\}.$$

L'application f est injective et son noyau n'a pas de base.

(3)c) D'après le théorème du rang, la dimension de l'image de f est deux. Or la dimension de $\mathbb{R}^3$ est trois, l'application f n'est pas surjective. Un vecteur v de l'image de f s'écrit $v=x(3,1,1)+y(2,-1,2)$. La famille $\{(3,1,1),(2,-1,2)\}$ étant libre et génératrice de l'image de f, c'est une base de cet ensemble.

(3)d) On a vu que $V=\text{vect}\{(1,-2)\}$. On en déduit que $f(V)=\text{vect}\{f(1,-2)\}$. Or $f(1,-2)=(-1,3,-3)=-(1,-3,3)$, on a donc $f(V)=W$. C'est une droite.

Exercice 2

(1) Le module de $-1+i$ est $\sqrt{2}$, on a donc

$$-1+i=\sqrt{2}(-\sqrt{2}/2+i\sqrt{2}/2)=\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k(-1)^{n-k} &= (-1+i)^n\\
&= (\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}})^n\\
&= \sqrt{2}^n e^{ni\frac{3\pi}{4}}\\
&= \sqrt{2}^n\cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right)+i\sqrt{2}^n\sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right).
\end{aligned}$$

(2) Soit $P(n)$: $s_n=\frac{n^2\,(n+1)^2}{4}$. Montrons par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

L'assertion $P(1)$ est vraie. En effet, on a

$$s_1=\sum_{k=1}^{1}k^3=1^3=1\quad\text{et}\quad\frac{1^2\,(1+1)^2}{4}=1.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que $P(n)$ est vraie et montrons que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned}
s_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 \\
&= s_n + (n+1)^3 \\
&= \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} + (n+1)^3 \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) \\
&= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \\
&= \frac{(n+1)^2\,(n+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Par le principe de récurrence, on a montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad s_n \;=\; \frac{n^2\,(n+1)^2}{4} \quad .$$

Exercice 3

(1) La négation de

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall b \in \mathbb{R}, \quad \big(a\,b > 0 \implies a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0 \big).$$

est

$$\exists a \in \mathbb{R}, \quad \exists b \in \mathbb{R}, \quad \big(a\,b > 0 \big) \quad \text{et} \quad \big(a \leqslant 0 \text{ ou } b \leqslant 0 \big).$$

C'est la négation qui est vraie. En effet, en prenant $a = -1$ et $b = -1$, on a bien $ab = 1 > 0$.

(2) La négation de

$$\exists m \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x - 3 \;\geqslant\; m\,.$$

est

$$\forall m \in \mathbb{R}, \quad \exists x \in \mathbb{R}, \quad x^2 - 2x - 3 \;<\; m\,.$$

C'est l'assertion qui est vraie. En effet, on remarque que $x^2-2x-3 = (x-1)^2-4$. Ainsi pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2-2x-3 \geqslant -4$, donc en prenant $m = -4$, l'asserttion est vraie.